

**แผนการสอนสมรรถนะอาชีพ
และบูรณาการปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง**

วิชาคณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์

รหัสวิชา 20000-1403

**หมวดวิชาสมรรถนะแกนกลาง กลุ่มวิชาคณิตศาสตร์
หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2562**

จัดทำโดย



**บริษัท ซีเอดยูเคชั่น จำกัด (มหาชน)
SE-EDUCATION PUBLIC COMPANY LIMITED**

**แผนการสอนสมรรถนะอาชีพ
และบูรณาการปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง**

**รหัสวิชา 20000-1403
วิชาคณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์
(Mathematics for Electricals and Electronics)**

โดย

นาย

รายการตรวจสอบและอนุญาตใช้

☐ เห็นควรอนุญาตให้ใช้ในการสอนได้

☐ ควรปรับปรุงเกี่ยวกับ.....

ลงชื่อ.....

(.....)

หัวหน้าหมวดวิชาคณิตศาสตร์

...../...../.....

☐ เห็นควรอนุญาตให้ใช้ในการสอนได้

☐ ควรปรับปรุงเกี่ยวกับ.....

ลงชื่อ.....

(.....)

หัวหน้างานพัฒนาหลักสูตรการเรียนการสอน

...../...../.....

☐ เห็นควรอนุญาตให้ใช้ในการสอนได้

☐ ควรปรับปรุงดังเสนอ

☐ อื่นๆ.....

ลงชื่อ.....

(.....)

รองผู้อำนวยการฝ่ายวิชาการ

...../...../.....

☐ อนุญาตให้ใช้ในการสอนได้

☐ อื่นๆ.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ผู้อำนวยการวิทยาลัย

คำนำ

ในเนื้อหาของแผนการสอนวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์ รหัสวิชา 20000-1403 นี้ ประกอบด้วยเนื้อหา 8 บท ซึ่งได้เรียบเรียงตามเอกสารและหนังสือที่ใช้ประกอบการเรียนการสอนในห้องเรียน เพื่อเป็นประโยชน์ต่อนักเรียนนักศึกษาในการเรียน ซึ่งจะให้ผลสัมฤทธิ์ตามจุดประสงค์ที่ต้องการ และได้ทำการเพิ่มเติมหน่วยการเรียนรู้ หลักการเศรษฐกิจพอเพียง ซึ่งเป็นปรัชญาแนวคิดของในหลวงรัชกาลที่ 9 เข้าไว้ในแผนการสอนหน่วยที่ 9 รวมแล้วใช้เวลาสอนทั้งหมด 36 ชั่วโมง โดยมีวิธีการสอนทั้งแบบบรรยาย อภิปราย ถามตอบ เป็นต้น มีสื่อที่ใช้ในการเรียนการสอนได้แก่ หนังสือ วีดีโอ เครื่องฉาย LCD โปรเจ็กเตอร์ ส่วนการวัดและประเมินผล เน้นทางด้านการสอบข้อเขียน คุณธรรม และจริยธรรม

ขอขอบคุณคณะกรรมการแผนกวิชาสามัญ หมวดวิชาคณิตศาสตร์ และคณะเจ้าหน้าที่ทุกๆ ฝ่าย ที่มีส่วนช่วยให้แผนการสอนนี้มีความสมบูรณ์ครบถ้วนทุกสาระ และขอมอบอุทิศความดี ความสมบูรณ์ของแผนการสอนนี้ให้แก่บิดามารดาผู้ให้กำเนิด และเป็นครูคนแรกที่เคารพรักเทิดทูนบูชาอย่างสูงยิ่ง และครูอาจารย์ผู้ประศาสน์วิชาทุกๆ ท่าน

นาย.....

วิทยาลัย.....

สารบัญ

คำนำ	จ
สารบัญ	ก
คำอธิบายรายวิชา	ข
ชื่อเรื่องและงานสมรรถนะที่พึงประสงค์	ข
ตารางวิเคราะห์หลักสูตร	ณ
หน่วยการสอน	ค
แผนการสอนหน่วยที่ 1 มุมและการวัด (Angles and Measure Angles)	1
หัวข้อเรื่อง	1
สาระสำคัญ	1
สมรรถนะประจำหน่วย	1
จุดประสงค์การสอน	2
เนื้อหาสาระ	3
กิจกรรมการเรียนรู้	4
งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม	5
สื่อการเรียนรู้	6
แหล่งการเรียนรู้	7
การประเมินผล	8
บันทึกหลังการสอน	9
แผนการสอนหน่วยที่ 2 ตรีโกณมิติ (Trigonometric)	10
หัวข้อเรื่อง	10
สาระสำคัญ	10
สมรรถนะประจำหน่วย	10
จุดประสงค์การสอน	11
เนื้อหาสาระ	12
กิจกรรมการเรียนรู้	13
งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม	14
สื่อการเรียนรู้	15
แหล่งการเรียนรู้	16

การประเมินผล	17
บันทึกหลังการสอน	18
แผนการสอนหน่วยที่ 3 ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย	
(Trigonometry of Unit Circle)	19
หัวข้อเรื่อง	19
สาระสำคัญ	19
สมรรถนะประจำหน่วย	19
จุดประสงค์การสอน	20
เนื้อหาสาระ	21
กิจกรรมการเรียนรู้การสอน	22
งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม	23
สื่อการเรียนรู้การสอน	24
แหล่งการเรียนรู้	25
การประเมินผล	26
บันทึกหลังการสอน	27
แผนการสอนหน่วยที่ 4 กฎของไซน์และโคไซน์ (Law of Sine and Cosine)	28
หัวข้อเรื่อง	28
สาระสำคัญ	28
สมรรถนะประจำหน่วย	28
จุดประสงค์การสอน	29
เนื้อหาสาระ	30
กิจกรรมการเรียนรู้การสอน	31
งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม	32
สื่อการเรียนรู้การสอน	33
แหล่งการเรียนรู้	34
การประเมินผล	35
บันทึกหลังการสอน	36

แผนการสอนหน่วยที่ 5 จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)	37
หัวข้อเรื่อง	37
สาระสำคัญ	37
สมรรถนะประจำหน่วย	37
จุดประสงค์การสอน	38
เนื้อหาสาระ	39
กิจกรรมการเรียนรู้	40
งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม	41
สื่อการเรียนรู้	42
แหล่งการเรียนรู้	43
การประเมินผล	44
บันทึกหลังการสอน	45
แผนการสอนหน่วยที่ 6 เมทริกซ์ (Matrix)	46
หัวข้อเรื่อง	46
สาระสำคัญ	46
สมรรถนะประจำหน่วย	46
จุดประสงค์การสอน	47
เนื้อหาสาระ	48
กิจกรรมการเรียนรู้	49
งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม	50
สื่อการเรียนรู้	51
แหล่งการเรียนรู้	52
การประเมินผล	53
บันทึกหลังการสอน	54

แผนการสอนหน่วยที่ 7 ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants)	55
หัวข้อเรื่อง	55
สาระสำคัญ	55
สมรรถนะประจำหน่วย	55
จุดประสงค์การสอน	56
เนื้อหาสาระ	57
กิจกรรมการเรียนการสอน	58
งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม	59
สื่อการเรียนการสอน	60
แหล่งการเรียนรู้	61
การประเมินผล	62
บันทึกหลังการสอน	63
แผนการสอนหน่วยที่ 8 การประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น (Applications of Determinant to Linear Equations System Solutions)	64
หัวข้อเรื่อง	64
สาระสำคัญ	64
สมรรถนะประจำหน่วย	64
จุดประสงค์การสอน	65
เนื้อหาสาระ	66
กิจกรรมการเรียนการสอน	67
งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม	68
สื่อการเรียนการสอน	69
แหล่งการเรียนรู้	70
การประเมินผล	71
บันทึกหลังการสอน	72

แผนการสอนหน่วยที่ 9 หลักการเศรษฐกิจพอเพียง	
(The Principle of Sufficiency Economics)	73
หัวข้อเรื่อง	73
สาระสำคัญ	73
สมรรถนะประจำหน่วย	73
จุดประสงค์การสอน	74
เนื้อหาสาระ	75
กิจกรรมการเรียนรู้การสอน	76
งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม	77
สื่อการเรียนรู้การสอน	78
แหล่งการเรียนรู้	79
การประเมินผล	80
บันทึกหลังการสอน	81

คำอธิบายรายวิชา			
ชื่อรายวิชา	คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์	รหัส	20000-1403
ระดับชั้น	ประกาศนียบัตรวิชาชีพ	หมวดวิชา	คณิตศาสตร์
หน่วยกิต	2	จำนวนชั่วโมงรวม	36 ชั่วโมง
ภาคเรียนที่	-	ปีการศึกษา	2562
จุดประสงค์รายวิชา เพื่อให้ 1. รู้และเข้าใจเกี่ยวกับมุมและการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ จำนวนเชิงซ้อน เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสาม 2. มีทักษะกระบวนการคิดและแก้ปัญหาเกี่ยวกับมุมและการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ จำนวนเชิงซ้อน เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสาม และนำไปประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ 3. มีเจตคติและกิริยานิสัยที่ดีในการคิด วิเคราะห์ แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ อย่างเป็นระบบ และมีความละเอียดรอบคอบในการปฏิบัติงาน สมรรถนะรายวิชา 1. คำนวณระยะทางและความสูงโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่กำหนด 2. แก้ปัญหาการวัดโดยใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ 3. ประยุกต์ความรู้เกี่ยวกับดีเทอร์มิแนนต์หาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นไม่เกินสามตัวแปร 4. ประยุกต์ใช้จำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้วในงานอาชีพ 5. ประยุกต์ใช้จำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังและรูปกรณฑ์ในงานอาชีพ 6. ประยุกต์ความรู้เกี่ยวกับมุมและการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสามไปใช้ในงานอาชีพ คำอธิบายรายวิชา ศึกษาและฝึกทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับมุมและการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ จำนวนเชิงซ้อน เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสาม และประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นไม่เกินสามตัวแปร และการประยุกต์ใช้ในงานไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์			

ชื่อเรื่องและงาน สมรรถนะและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมของแผนการสอน

ชื่อเรื่องและงาน	สมรรถนะและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
บทที่ 1 มุมและการวัดมุม (Angles and Measure Angles) 1.1 หน่วยวัดมุม (Unit of Angular Measure) 1.1.1 หน่วยองศา (Degree) 1.1.2 หน่วยเรเดียน (Radian)	สมรรถนะ รู้และเข้าใจหน่วยวัดมุม หน่วยองศา และหน่วยเรเดียนได้อย่างถูกต้อง จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ด้านความรู้ 1. สามารถอธิบายหน่วยวัดมุม หน่วยองศาและหน่วยเรเดียนได้อย่างถูกต้อง ด้านทักษะ 2. ทำแบบฝึกหัดแก้ปัญหาเรื่องมุมและการวัดมุมได้อย่างถูกต้อง ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง 3. ตอบคำถามขณะเรียนและทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง และสำเร็จภายในระยะเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง

ชื่อเรื่องและงาน	สมรรถนะและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
บทที่ 2 ตรีโกณมิติ (Trigonometric) 2.1 ทฤษฎีพีทาโกรัส (Pythagoras Theorem) 2.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติ (Trigonometric Ratio) 2.3 การประยุกต์การวัดด้วยอัตราส่วนตรีโกณมิติ	สมรรถนะ รู้และเข้าใจทฤษฎีพีทาโกรัส อัตราส่วนตรีโกณมิติ และสามารถประยุกต์การวัดด้วยอัตราส่วนตรีโกณมิติได้อย่างถูกต้อง จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ด้านความรู้ 1. สามารถอธิบายทฤษฎีพีทาโกรัสได้อย่างถูกต้อง 2. สามารถอธิบายอัตราส่วนตรีโกณมิติได้อย่างถูกต้อง 3. สามารถอธิบายการประยุกต์การวัดด้วยอัตราส่วนตรีโกณมิติได้อย่างถูกต้อง ด้านทักษะ 4. ทำแบบฝึกหัดหาค่ามุมและความยาวด้านด้วยทฤษฎีพีทาโกรัส อัตราส่วนตรีโกณมิติ และประยุกต์การวัดด้วยอัตราส่วนตรีโกณมิติได้อย่างถูกต้อง ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง 5. ตอบคำถามขณะเรียนและทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้อง และสำเร็จภายในระยะเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง

ชื่อเรื่องและงาน	สมรรถนะและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
บทที่ 3 ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย (Trigonometry of Unit Circle) 3.1 จตุภาค (Quadrant) 3.2 วงกลมหนึ่งหน่วย (Unit Circle) 3.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย (Trigonometry Function of Unit Circle) 3.4 การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ตาราง 3.5 กราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ (Graphs of the Sine and Cosine Functions)	สมรรถนะ รู้และเข้าใจวงกลมหนึ่งหน่วย ฟังก์ชันตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ตาราง กราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ได้อย่างถูกต้อง จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ด้านความรู้ 1. สามารถอธิบายวงกลมหนึ่งหน่วยได้อย่างถูกต้อง 2. สามารถอธิบายฟังก์ชันตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วยได้อย่างถูกต้อง 3. สามารถอธิบายการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ตารางได้อย่างถูกต้อง 4. สามารถอธิบายกราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ได้อย่างถูกต้อง ด้านทักษะ 5. ทำแบบฝึกหัดคำนวณหาฟังก์ชันตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ตาราง และเขียนกราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ได้อย่างถูกต้อง ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง 6. ตอบคำถามขณะเรียน และทำแบบฝึกหัด ได้อย่างถูกต้อง และสำเร็จภายในระยะเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง

ชื่อเรื่องและงาน	สมรรถนะและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
บทที่ 4 กฎของไซน์และโคไซน์ (Law of Sine and Cosine) 4.1 กฎของไซน์ (Law of Sine) 4.2 กฎของโคไซน์ (Law of Cosine) 4.3 การประยุกต์ใช้กฎของไซน์และโคไซน์ (Application of Law of Sine and Cosine)	สมรรถนะ รู้และเข้าใจกฎของไซน์และโคไซน์ การประยุกต์ใช้กฎของไซน์และโคไซน์ได้อย่างถูกต้อง จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ด้านความรู้ 1. สามารถอธิบายกฎของไซน์ได้อย่างถูกต้อง 2. สามารถอธิบายกฎของโคไซน์ได้อย่างถูกต้อง 3. สามารถอธิบายการประยุกต์ใช้กฎของไซน์และโคไซน์ได้อย่างถูกต้อง ด้านทักษะ 4. ทำแบบฝึกหัดคำนวณประยุกต์ใช้กฎของไซน์และโคไซน์ หามุมแต่ละมุม และความยาวของด้านแต่ละด้านได้อย่างถูกต้อง ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง 5. ตอบคำถามขณะเรียนและทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง และสำเร็จภายในระยะเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง

ชื่อเรื่องและงาน	สมรรถนะและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
บทที่ 5 จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number) 5.1 นิยามของจำนวนเชิงซ้อน 5.2 สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน (Algebraic Properties of Complex Numbers) 5.3 กราฟของจำนวนเชิงซ้อน (Graph of Complex Plane) 5.4 ระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinate System) 5.5 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว (Complex Numbers in Polar Form)	สมรรถนะ รู้และเข้าใจนิยามของจำนวนเชิงซ้อน สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน กราฟของจำนวนเชิงซ้อน ระบบพิกัดเชิงขั้ว และจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้อย่างถูกต้อง จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ด้านความรู้ 1. สามารถอธิบายนิยามของจำนวนเชิงซ้อนได้อย่างถูกต้อง 2. สามารถอธิบายสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนได้อย่างถูกต้อง 3. สามารถอธิบายกราฟของจำนวนเชิงซ้อนได้อย่างถูกต้อง 4. สามารถอธิบายระบบพิกัดเชิงขั้วและจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้อย่างถูกต้อง ด้านทักษะ 5. ทำแบบฝึกหัดคำนวณหาผลลัพธ์ของจำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้วได้อย่างถูกต้อง ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง 6. ตอบคำถามขณะเรียนและทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้อง และสำเร็จภายในระยะเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง

ชื่อเรื่องและงาน	สมรรถนะและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
บทที่ 6 เมทริกซ์ (Matrix) 6.1 นิยามของเมทริกซ์ 6.2 ขนาดของเมทริกซ์ (Size of Matrix) 6.3 เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose of a Matrix) 6.4 การบวกลบเมทริกซ์ (Addition and Subtraction of Matrix) 6.5 การคูณเมทริกซ์ (Matrix Multiplication)	สมรรถนะ รู้และเข้าใจนิยามของเมทริกซ์ ขนาดของเมทริกซ์ เมทริกซ์สลับเปลี่ยน การบวกลบเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ได้อย่างถูกต้อง จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ด้านความรู้ 1. สามารถอธิบายนิยามของเมทริกซ์ได้อย่างถูกต้อง 2. สามารถอธิบายขนาดของเมทริกซ์จัตุรัสได้อย่างถูกต้อง 3. สามารถอธิบายเมทริกซ์สลับเปลี่ยนได้อย่างถูกต้อง 4. สามารถอธิบายการบวกลบเมทริกซ์และการคูณเมทริกซ์ได้อย่างถูกต้อง ด้านทักษะ 5. ทำแบบฝึกหัดคำนวณหาผลลัพธ์ของเมทริกซ์สลับเปลี่ยน การบวกลบเมทริกซ์ และการคูณเมทริกซ์ได้อย่างถูกต้อง ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง 6. ตอบคำถามขณะเรียนและทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้อง และสำเร็จภายในระยะเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง

ชื่อเรื่องและงาน	สมรรถนะและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
บทที่ 7 ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants) 7.1 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 1×1 7.2 การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 โดยตรง (Cross Product) 7.3 การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 (Cross Product) 7.4 การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์ (Cofactor)	สมรรถนะ รู้และเข้าใจดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 1×1 การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีโดยตรง และด้วยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ด้านความรู้ 1. สามารถอธิบายดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 1×1 2. สามารถอธิบายการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ได้อย่างถูกต้อง 3. สามารถอธิบายการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ได้อย่างถูกต้อง ด้านทักษะ 4. ทำแบบฝึกหัดคำนวณหาผลลัพธ์ของดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ 3×3 ด้วยวิธีต่างๆ ได้อย่างถูกต้อง ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง 5. ตอบคำถามขณะเรียนและทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง และสำเร็จภายในระยะเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง

ชื่อเรื่องและงาน	สมรรถนะและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
บทที่ 8 การประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น (Applications of Determinant to Linear Equations System Solutions) 8.1 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยดีเทอร์มิแนนต์ 8.2 การประยุกต์แก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยดีเทอร์มิแนนต์	สมรรถนะ รู้และเข้าใจการประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นได้อย่างถูกต้อง จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ด้านความรู้ 1. สามารถอธิบายการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยดีเทอร์มิแนนต์ได้อย่างถูกต้อง 2. สามารถอธิบายการประยุกต์แก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยดีเทอร์มิแนนต์ได้อย่างถูกต้อง ด้านทักษะ 3. ทำแบบฝึกหัดคำนวณการประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นได้อย่างถูกต้อง ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง 4. ตอบคำถามขณะเรียนและทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้อง และสำเร็จภายในระยะเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง

ชื่อเรื่องและงาน	สมรรถนะที่พึงประสงค์
บทที่ 9 หลักการเศรษฐกิจพอเพียง (The Principle of Sufficiency Economics) 9.1 ความหมายและความสำคัญของหลักการเศรษฐกิจพอเพียง 9.2 การนำหลักการเศรษฐกิจพอเพียงไปใช้งาน	สมรรถนะ รู้และเข้าใจความหมายและความสำคัญของหลักการเศรษฐกิจพอเพียง และการนำหลักการเศรษฐกิจพอเพียงไปใช้งานได้อย่างถูกต้อง จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ด้านความรู้ 1. บอกความหมายและความสำคัญของหลักการเศรษฐกิจพอเพียงได้อย่างถูกต้อง 2. บอกวิธีการนำหลักการเศรษฐกิจพอเพียงไปใช้งานได้อย่างถูกต้อง ด้านทักษะ 3. สามารถบอกความหมายและความสำคัญของหลักการเศรษฐกิจพอเพียงได้อย่างถูกต้อง 4. สามารถนำกระดาษ A4 ที่ใช้แล้วกลับมาใช้ใหม่ได้อย่างถูกต้อง 5. สามารถใช้กระดาษ A4 มาประยุกต์ใช้งานได้อย่างถูกต้อง ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง 6. ตอบคำถามขณะเรียนและทำปฏิบัติตามหลักการเศรษฐกิจพอเพียงได้อย่างถูกต้อง และสำเร็จภายในระยะเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง

ตารางวิเคราะห์หลักสูตร

ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์

รหัสวิชา 20000-1403

จำนวนชั่วโมง/สัปดาห์ 2

หน่วยกิต 2

(1) เนื้อหา (รายการสอนหลัก)	พฤติกรรม (5)						(4) รวม	จำนวนชั่วโมงสอน	ลำดับความสำคัญ
	ความรู้ – ความจำ	ความเข้าใจ	การนำไปใช้	การวิเคราะห์/	การประเมินค่า	เจตคติ			
1. มุมและการวัดมุม	10	10	10	7	6	–	43	4	8
2. ตรีโกณมิติ	10	10	10	10	10	–	50	4	1
3. ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย	10	10	10	10	8	–	48	4	3
4. กฎของไซน์และโคไซน์	10	10	10	10	9	–	49	4	2
5. จำนวนเชิงซ้อน	10	10	10	9	8	-	47	4	4
6. เมทริกซ์	10	10	10	9	7	–	46	4	5
7. ดีเทอร์มิแนนต์	10	10	10	8	7	–	45	4	6
8. การประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผล เฉลยของระบบสมการเชิงเส้น	10	10	10	7	7	–	44	6	7
9. หลักการเศรษฐกิจพอเพียง	10	10	10	7	5	–	42	2	9
รวม (6)	90	90	90	77	67	–	414	36	
ลำดับความสำคัญ (7)	1	2	3	4	5				

หมายเหตุ : 8 – 10 สำคัญมาก
5 – 7 ปานกลาง
1 – 4 สำคัญน้อย

$$\text{สูตรในการคำนวณหาจำนวนคาบ} = \frac{W \times TP}{TW}$$

W = น้ำหนักรวมในแต่ละหน่วย

TP = จำนวนคาบทั้งหมด

TW = น้ำหนักรวมทั้งหมด

หน่วยการสอน

รหัสวิชา 20000-1403 วิชาคณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์

จำนวน 2 ชั่วโมง/สัปดาห์

หน่วยที่	ชื่อหน่วยการสอน	จำนวนชั่วโมง
1	มุมและการวัดมุม	4
2	ตรีโกณมิติ	4
3	ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย	4
4	กฎของไซน์และโคไซน์	4
5	จำนวนเชิงซ้อน	4
6	เมทริกซ์	4
7	ดีเทอร์มิแนนต์	4
8	การประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น	6
9	หลักการเศรษฐกิจพอเพียง	2
	รวม	36

	แผนการสอน	หน่วยที่ 1
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์	สอนครั้งที่ 1-2
	ชื่อหน่วย บทที่ 1	ชั่วโมงรวม 36
ชื่อเรื่อง มุมและการวัดมุม(Angles and Measure Angles)		จำนวนชั่วโมง 4
หัวข้อเรื่อง บทที่ 1 มุมและการวัดมุม (Angles and Measure Angles) 1.1 หน่วยวัดมุม (Unit of Angular Measure) สาระสำคัญ มุม (Angles) คือรูปทรงเรขาคณิต ที่เกิดจากปลายเส้นตรง 2 เส้น หรือเรียกว่าแขนของมุมเชื่อมกันที่จุดจุดหนึ่ง เรียกว่า จุดยอดมุม (Vertex) หน่วยวัดมุม ที่นิยมในการวัด ได้แก่ หน่วยองศา (Degree) ซึ่งเขียนในรูปสัญลักษณ์วงกลมด้วย $^{\circ}$ ในหน่วยองศา หรือวัดมุมในหน่วยเรเดียน (Radian เขียนย่อว่า Rad) สมรรถนะประจำหน่วย(การประยุกต์ใช้ ความรู้ ทักษะ คุณธรรม จริยธรรม จรรยาบรรณวิชาชีพ) 1. รู้และเข้าใจหน่วยวัดมุม ในหน่วยองศาและหน่วยเรเดียนได้อย่างถูกต้อง 2. ตอบคำถามขณะเรียนได้ถูกต้อง 3. ทำแบบฝึกหัดการแก้ปัญหาเรื่องมุมและการวัดมุม ได้อย่างถูกต้อง และสำเร็จภายในเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผล ตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง		

	แผนการสอน	หน่วยที่ 1
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์	สอนครั้งที่ 1-2
	ชื่อหน่วย บทที่ 1	ชั่วโมงรวม 36
ชื่อเรื่อง มุมและการวัดมุม(Angles and Measure Angles)		จำนวนชั่วโมง 4
จุดประสงค์การสอน จุดประสงค์ทั่วไป เพื่อให้ 1. เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจหน่วยวัดมุม (Unit of angular Measure) ได้อย่างถูกต้อง 2. มีความรู้ความเข้าใจหน่วยองศา (Degree) ได้อย่างถูกต้อง 3. มีความรู้ความเข้าใจหน่วยเรเดียน (Radian) ได้อย่างถูกต้อง จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ด้านความรู้ 4. บอกหน่วยวัดมุม ในหน่วยองศา และหน่วยเรเดียนได้อย่างถูกต้อง ด้านทักษะ 5. ทำแบบฝึกหัดแก้ปัญหาเรื่องมุมและการวัดมุมได้อย่างถูกต้อง ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง 6. ตอบคำถามขณะเรียน และทำแบบฝึกหัดแก้ปัญหาเรื่องหน่วยวัดมุมในหน่วยองศา และหน่วยเรเดียนได้อย่างถูกต้อง และสำเร็จภายในระยะเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง		

เนื้อหาสาระ

บทที่ 1 มุมและการวัดมุม (Angles and Measure Angles)

1.1 หน่วยวัดมุม (Unit of angular measure)

1.1.1 หน่วยองศา (Degree)

1.1.2 หน่วยเรเดียน (Radian)

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน	
ขั้นตอนการสอนหรือกิจกรรมของครู	ขั้นตอนการเรียนรู้หรือกิจกรรมของนักเรียน
1. ตรวจเช็ครายชื่อประจำวัน 2. ซักถามนักเรียน-นักศึกษาเป็นรายบุคคล 3. กล่าวนำก่อนเข้าเนื้อหา 4. อธิบายเนื้อหา 5. ซักถามนักเรียนเพิ่มเติม 6. สังเกตนักเรียนในระหว่างการสอน 7. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน 8. ให้นักเรียนไปศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติม 9. วัดผลและประเมินผลภาคทฤษฎี หมายเหตุ : อธิบายประกอบแผ่นใส หรือเครื่องฉาย LCD Projector	1. ตั้งใจฟังคำอธิบาย 2. จดบันทึกเพิ่มเติม 3. นักเรียนตอบคำถามเป็นรายบุคคล 4. นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน 5. สอบภาคทฤษฎี

งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม

ก่อนเรียน

1. ชี้แจงข้อตกลงในการเรียนวิชานี้ในเรื่องเวลาเรียน วิธีการให้คะแนน วิธีการตัดเกรด
2. ความประพฤติในห้องเรียน
3. การทำกิจกรรม การมอบหมายหน้าที่ความรับผิดชอบของแต่ละคนในห้องเรียน

ขณะเรียน

1. ให้นักเรียนตั้งใจฟังคำอธิบาย
2. ให้นักเรียนจดบันทึกเพิ่มเติม
3. ให้นักเรียนตอบคำถามเป็นรายบุคคล
4. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
5. นักเรียนสอบภาคทฤษฎี
6. สรุปผลการเรียนโดยการซัก-ถามปัญหาที่เกิดขึ้น

หลังเรียน

1. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
2. ให้นักเรียนกลับไปทบทวนความรู้ที่เกี่ยวกับบทเรียนที่เรียนไป
3. ให้นักเรียนค้นคว้าทำรายงาน
4. ให้นักเรียนกลับไปอ่านบทเรียนบทถัดไป

สื่อการเรียนการสอน

สื่อสิ่งพิมพ์

1. บุญธรรม ภัทราจารกุล. **คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ บริษัท ซีเอ็ดดูเคชั่น จำกัด (มหาชน), 2562. ใช้ประกอบการเรียนการสอนทุกขั้นตอนการสอน
2. แผ่นภาพ

สื่อโสตทัศน

1. เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ (Overhead Projector) หรือ LCD Projector
2. สื่อ Powerpoint หรือแผ่นใส
3. กระดานดำ
4. วีดีโอ
5. ทีวี

หุ่นจำลองหรือของจริง

- สถานการณ์จำลอง เพื่อฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์

แหล่งการเรียนรู้

ในสถานศึกษา

1. ห้องสมุด ได้แก่ หนังสือ ตำรา ที่เกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์
2. ครูผู้สอน
3. ค้นหาหาความรู้ทาง Internet

นอกสถานศึกษา

1. หอสมุดมหาวิทยาลัย
2. แหล่งเรียนรู้ชุมชน

การบูรณาการ/ความสัมพันธ์กับวิชาอื่น

1. วิชาเครื่องมือวัด
2. วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน
3. วิชากลศาสตร์

การประเมินผล

ก่อนเรียน

1. ตรวจสอบการแต่งกายของนักเรียน
2. มารยาทของนักเรียน
3. การสัมมาคารวะของนักเรียน
4. การถาม-ตอบ

ขณะเรียน

1. สังเกตพฤติกรรมการเรียน
2. ถาม-ตอบ
3. สังเกตความสนใจ

หลังเรียน

1. ทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
2. สอบเก็บคะแนน

บันทึกหลังการสอน

ผลการใช้แผนการสอน

1. เนื้อหามีความสอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
2. จำนวนที่กำหนดไว้ในหน่วยนี้ มีความเหมาะสมพอดี
3. กิจกรรมการสอนหรือวิธีการสอนในขั้นตอนการสอนกิจกรรมของนักเรียนมีความเหมาะสมพอดี

ผลการเรียนของนักเรียน

1. นักเรียนส่วนใหญ่มีความตั้งใจเรียน สืบเนื่องจากการสอบถาม ถาม-ตอบ ได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. นักเรียนส่วนใหญ่ทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากขึ้น
3. นักเรียนส่วนใหญ่มีคะแนนสอบสูงขึ้น

ผลการสอนของครู

1. มีเครื่องฉาย LCD Projector และสื่อ Powerpoint ทำให้สอนได้เร็วขึ้น สะดวกขึ้น
2. มีความมั่นใจในการสอนมากขึ้น
3. สอนได้ตามเวลาที่กำหนดของแผนการสอน

	แผนการสอน	หน่วยที่ 2
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์	สอนครั้งที่ 3-5
	ชื่อหน่วย บทที่ 2	ชั่วโมงรวม 36
ชื่อเรื่อง ตรีโกณมิติ (Trigonometric)		จำนวนชั่วโมง 6
หัวข้อเรื่อง บทที่ 2 ตรีโกณมิติ (Trigonometric) 2.1 ทฤษฎีพีทาโกรัส (Pythagoras Theorem) 2.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติ (Trigonometric Ratio) 2.3 การประยุกต์การวัดด้วยอัตราส่วนตรีโกณมิติ สาระสำคัญ ตรีโกณมิติ (Trigonometric) เป็นการศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของความยาวและมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือถ้ารู้ค่าความยาวของด้านหนึ่งและขนาดของมุมใดมุมหนึ่ง เราจะสามารถคำนวณหาขนาดของมุมอื่นๆ และความยาวของด้านอื่นๆ และสามารถใช้กับรูปสามเหลี่ยมที่ไม่ใช่รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยการแบ่งรูปสามเหลี่ยมใดๆ ให้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก หรือแบ่งรูปสี่เหลี่ยมหรือรูปหลายเหลี่ยมให้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะทำให้สามารถคำนวณหาค่าต่างๆ ได้ด้วยรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก สมรรถนะประจำหน่วย (การประยุกต์ใช้ ความรู้ ทักษะ คุณธรรม จริยธรรม จรรยาบรรณวิชาชีพ) 1. รู้และเข้าใจทฤษฎีพีทาโกรัสได้อย่างถูกต้อง 2. รู้และเข้าใจอัตราส่วนตรีโกณมิติได้อย่างถูกต้อง 3. สามารถประยุกต์การวัดด้วยอัตราส่วนตรีโกณมิติได้อย่างถูกต้อง 4. ตอบคำถามขณะเรียนได้อย่างถูกต้อง 5. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง และสำเร็จภายในเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผล ตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง		

	แผนการสอน	หน่วยที่ 2
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์	สอนครั้งที่ 3-5
	ชื่อหน่วย บทที่ 2	ชั่วโมงรวม 36
ชื่อเรื่อง ตรีโกณมิติ (Trigonometric)		จำนวนชั่วโมง 6
จุดประสงค์การสอน จุดประสงค์ทั่วไป เพื่อให้ 1. มีความรู้ความเข้าใจทฤษฎีพีทาโกรัส (Pythagoras Theorem) 2. มีความรู้ความเข้าใจอัตราส่วนตรีโกณมิติ (Trigonometric Ratio) 3. มีความรู้ความเข้าใจการประยุกต์การวัดด้วยอัตราส่วนตรีโกณมิติ จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ด้านความรู้ 1. สามารถอธิบายทฤษฎีพีทาโกรัส (Pythagoras Theorem) ได้อย่างถูกต้อง 2. สามารถอธิบายอัตราส่วนตรีโกณมิติ (Trigonometric Ratio) ได้อย่างถูกต้อง 3. สามารถอธิบายประยุกต์การวัดด้วยอัตราส่วนตรีโกณมิติ ได้อย่างถูกต้อง ด้านทักษะ 4. ทำแบบฝึกหัดหาค่ามุมและความยาวด้านด้วยทฤษฎีพีทาโกรัส อัตราส่วนตรีโกณมิติ และประยุกต์การวัดด้วยอัตราส่วนตรีโกณมิติได้อย่างถูกต้อง ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง 5. ตอบคำถามขณะเรียน และทำแบบฝึกหัด ได้อย่างถูกต้อง และสำเร็จภายในระยะเวลาที่กำหนด อย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง		

เนื้อหาสาระ

บทที่ 2 ตรีโกณมิติ (Trigonometric)

- 2.1 ทฤษฎีพีทาโกรัส (Pythagoras Theorem)
- 2.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติ (Trigonometric Ratio)
- 2.3 การประยุกต์การวัดด้วยอัตราส่วนตรีโกณมิติ

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน	
ขั้นตอนการสอนหรือกิจกรรมของครู	ขั้นตอนการเรียนรู้หรือกิจกรรมของนักเรียน
1. ตรวจเช็ครายชื่อประจำวัน 2. ซักถามนักเรียน-นักศึกษาเป็นรายบุคคล 3. กล่าวนำก่อนเข้าเนื้อหา 4. อธิบายเนื้อหา 5. ซักถามนักเรียนเพิ่มเติม 6. สังเกตนักเรียนในระหว่างการสอน 7. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน 8. ให้นักเรียนไปศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติม 9. วัดผลและประเมินผลภาคทฤษฎี หมายเหตุ : อธิบายประกอบแผ่นใส หรือเครื่องฉาย LCD Projector	1. ตั้งใจฟังคำอธิบาย 2. จดบันทึกเพิ่มเติม 3. นักเรียนตอบคำถามเป็นรายบุคคล 4. นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน 5. สอบภาคทฤษฎี

งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม

ก่อนเรียน

1. ชี้แจงข้อตกลงในการเรียนวิชานี้ในเรื่องเวลาเรียน วิธีการให้คะแนน วิธีการตัดเกรด
2. ความประพฤติในห้องเรียน
3. การทำกิจกรรม การมอบหมายหน้าที่ความรับผิดชอบของแต่ละคนในห้องเรียน

ขณะเรียน

1. ให้นักเรียนตั้งใจฟังคำอธิบาย
2. ให้นักเรียนจดบันทึกเพิ่มเติม
3. ให้นักเรียนตอบคำถามเป็นรายบุคคล
4. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
5. นักเรียนสอบภาคทฤษฎี
6. สรุปผลการเรียนโดยการซัก-ถามปัญหาที่เกิดขึ้น

หลังเรียน

1. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
2. ให้นักเรียนกลับไปทบทวนความรู้ที่เกี่ยวกับบทเรียนที่เรียนไป
3. ให้นักเรียนค้นคว้าทำรายงาน
4. ให้นักเรียนกลับไปอ่านบทเรียนบทถัดไป

สื่อการเรียนการสอน

สื่อสิ่งพิมพ์

1. บุญธรรม ภัทราจารกุล. **คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ บริษัท ซีเอ็ดดูเคชั่น จำกัด (มหาชน), 2562. ใช้ประกอบการเรียนการสอนทุกขั้นตอนการสอน
2. แผ่นภาพ

สื่อโสตทัศน

1. เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ (Overhead Projector) หรือ LCD Projector
2. สื่อ Powerpoint หรือแผ่นใส
3. กระดานดำ
4. วิดีโอ
5. ทีวี

หุ่นจำลองหรือของจริง

- สถานการณ์จำลอง เพื่อฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์

แหล่งการเรียนรู้

ในสถานศึกษา

1. ห้องสมุด ได้แก่ หนังสือ ตำรา ที่เกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์
2. ครูผู้สอน
3. ค้นหาหาความรู้ทาง Internet

นอกสถานศึกษา

1. หอสมุดมหาวิทยาลัย
2. แหล่งเรียนรู้ชุมชน

การบูรณาการ/ความสัมพันธ์กับวิชาอื่น

1. วิชาเครื่องมือวัด
2. วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน
3. วิชากลศาสตร์

การประเมินผล

ก่อนเรียน

1. ตรวจสอบการแต่งกายของนักเรียน
2. มารยาทของนักเรียน
3. การสัมมาคารวะของนักเรียน
4. การถาม-ตอบ

ขณะเรียน

1. สังเกตพฤติกรรมการเรียน
2. ถาม-ตอบ
3. สังเกตความสนใจ

หลังเรียน

1. ทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
2. สอบเก็บคะแนน

บันทึกหลังการสอน

ผลการใช้แผนการสอน

1. เนื้อหามีความสอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
2. จำนวนที่กำหนดไว้ในหน่วยนี้ มีความเหมาะสมพอดี
3. กิจกรรมการสอนหรือวิธีการสอนในขั้นตอนการสอนกิจกรรมของนักเรียนมีความเหมาะสมพอดี

ผลการเรียนของนักเรียน

1. นักเรียนส่วนใหญ่มีความตั้งใจเรียน สืบเนื่องจากการสอบถาม ถาม-ตอบ ได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. นักเรียนส่วนใหญ่ทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากขึ้น
3. นักเรียนส่วนใหญ่มีคะแนนสอบสูงขึ้น

ผลการสอนของครู

1. มีเครื่องฉาย LCD Projector และสื่อ Powerpoint ทำให้สอนได้เร็วขึ้น สะดวกขึ้น
2. มีความมั่นใจในการสอนมากขึ้น
3. สอนได้ตามเวลาที่กำหนดของแผนการสอน

	แผนการสอน	หน่วยที่ 3
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์	สอนครั้งที่ 6-7
	ชื่อหน่วย บทที่ 3	ชั่วโมงรวม 36
ชื่อเรื่อง ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย		จำนวนชั่วโมง 4
หัวข้อเรื่อง บทที่ 3 ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย (Trigonometry of Unit Circle) 3.1 จตุภาค (Quadrant) 3.2 วงกลมหนึ่งหน่วย (Unit Circle) 3.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย (Trigonometry Function of Unit Circle) 3.4 การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ตาราง 3.5 กราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ (Graphs of the Sine and Cosine Functions) สาระสำคัญ วงกลมหนึ่งหน่วย หมายถึง วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (Origin) และมีรัศมียาวเท่ากับ 1 หน่วย ฟังก์ชันตรีโกณมิติถูกนิยามขึ้นสำหรับมุมระหว่าง 0 ถึง 90 องศา (0 ถึง $\pi/2$ เรเดียน) แต่หากใช้วงกลมหนึ่งหน่วย จะช่วยในการคำนวณ และหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เป็นบวกและลบได้ ไม่ใช่แค่ 0 ถึง 90 องศาเท่านั้น สมรรถนะประจำหน่วย (การประยุกต์ใช้ ความรู้ ทักษะ คุณธรรม จริยธรรม จรรยาบรรณวิชาชีพ) 1. รู้และเข้าใจวงกลมหนึ่งหน่วยได้อย่างถูกต้อง 2. รู้และเข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วยได้อย่างถูกต้อง 3. รู้และเข้าใจการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ตารางได้อย่างถูกต้อง 4. รู้และเข้าใจสมบัติของพีทาโกรัสได้อย่างถูกต้อง 5. รู้และเข้าใจกราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ได้อย่างถูกต้อง 6. ตอบคำถามขณะเรียน และทำแบบฝึกหัด ได้อย่างถูกต้อง และสำเร็จภายในเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผล ตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง		

	แผนการสอน	หน่วยที่ 3
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์	สอนครั้งที่ 6-7
	ชื่อหน่วย บทที่ 3	ชั่วโมงรวม 36
ชื่อเรื่อง ทรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย		จำนวนชั่วโมง 4
จุดประสงค์การสอน จุดประสงค์ทั่วไป เพื่อให้ 1. มีความรู้ความเข้าใจวงกลมหนึ่งหน่วย 2. มีความรู้ความเข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย 3. มีความรู้ความเข้าใจการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ตาราง 4. มีความรู้ความเข้าใจสมบัติของพีทาโกรัส 5. มีความรู้ความเข้าใจกราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ด้านความรู้ 1. สามารถอธิบายวงกลมหนึ่งหน่วย ได้อย่างถูกต้อง 2. สามารถอธิบายฟังก์ชันตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย ได้อย่างถูกต้อง 3. สามารถอธิบายการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ตาราง ได้อย่างถูกต้อง 4. สามารถอธิบายสมบัติของพีทาโกรัส ได้อย่างถูกต้อง 5. สามารถอธิบายกราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ได้อย่างถูกต้อง ด้านทักษะ 6. ทำแบบฝึกหัดคำนวณหาฟังก์ชันตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย สมบัติของพีทาโกรัส เขียนกราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ได้อย่างถูกต้อง ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง 7. ตอบคำถามขณะเรียน และทำแบบฝึกหัด ได้อย่างถูกต้อง และสำเร็จภายในระยะเวลาที่กำหนด อย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง		

เนื้อหาสาระ

บทที่ 3 ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย (Trigonometry of Unit Circle)

3.1 จตุภาค (Quadrant)

3.2 วงกลมหนึ่งหน่วย (Unit Circle)

3.2.1 การกำหนดมุมบนวงกลมหนึ่งหน่วย

3.2.2 การหาค่าฟังก์ชันของมุม 30° , 45° และ 60°

3.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย (Trigonometry Function of Unit Circle)

3.4 การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ตาราง

3.5 กราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ (Graphs of the Sine and Cosine Functions)

3.5.1 กราฟของฟังก์ชันไซน์

3.5.2 กราฟของฟังก์ชันโคไซน์

กิจกรรมการเรียนการสอน	
ขั้นตอนการสอนหรือกิจกรรมของครู	ขั้นตอนการเรียนรู้หรือกิจกรรมของนักเรียน
1. ตรวจเช็ครายชื่อประจำวัน 2. ซักถามนักเรียน-นักศึกษาเป็นรายบุคคล 3. กล่าวนำก่อนเข้าเนื้อหา 4. อธิบายเนื้อหา 5. ซักถามนักเรียนเพิ่มเติม 6. สังเกตนักเรียนในระหว่างการสอน 7. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน 8. ให้นักเรียนไปศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติม 9. วัดผลและประเมินผลภาคทฤษฎี หมายเหตุ : อธิบายประกอบแผ่นใส หรือเครื่องฉาย LCD Projector	1. ตั้งใจฟังคำอธิบาย 2. จดบันทึกเพิ่มเติม 3. นักเรียนตอบคำถามเป็นรายบุคคล 4. นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน 5. สอบภาคทฤษฎี

งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม

ก่อนเรียน

1. ชี้แจงข้อตกลงในการเรียนวิชานี้ในระยะเวลาเรียน วิธีการให้คะแนน วิธีการตัดเกรด
2. ความประพฤติในห้องเรียน
3. การทำกิจกรรม การมอบหมายหน้าที่ความรับผิดชอบของแต่ละคนในห้องเรียน

ขณะเรียน

1. ให้นักเรียนตั้งใจฟังคำอธิบาย
2. ให้นักเรียนจดบันทึกเพิ่มเติม
3. ให้นักเรียนตอบคำถามเป็นรายบุคคล
4. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
5. นักเรียนสอบภาคทฤษฎี
6. สรุปผลการเรียน โดยการซัก-ถามปัญหาที่เกิดขึ้น

หลังเรียน

1. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
2. ให้นักเรียนกลับไปทบทวนความรู้ที่เกี่ยวกับบทเรียนที่เรียนไป
3. ให้นักเรียนค้นคว้าทำรายงาน
4. ให้นักเรียนกลับไปอ่านบทเรียนบทถัดไป

แหล่งการเรียนรู้

ในสถานศึกษา

1. ห้องสมุด ได้แก่ หนังสือ ตำรา ที่เกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์
2. ครูผู้สอน
3. ค้นหาหาความรู้ทาง Internet

นอกสถานศึกษา

1. หอสมุดมหาวิทยาลัย
2. แหล่งเรียนรู้ชุมชน

การบูรณาการ/ความสัมพันธ์กับวิชาอื่น

1. วิชาเครื่องมือวัด
2. วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน
3. วิชาพลศึกษา

การประเมินผล

ก่อนเรียน

1. ตรวจสอบการแต่งกายของนักเรียน
2. มารยาทของนักเรียน
3. การสัมมาคารวะของนักเรียน
4. การถาม-ตอบ

ขณะเรียน

1. สังเกตพฤติกรรมการเรียน
2. ถาม-ตอบ
3. สังเกตความสนใจ

หลังเรียน

1. ทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
2. สอบเก็บคะแนน

บันทึกหลังการสอน

ผลการใช้แผนการสอน

1. เนื้อหามีความสอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
2. จำนวนที่กำหนดไว้ในหน่วยนี้ มีความเหมาะสมพอดี
3. กิจกรรมการสอนหรือวิธีการสอนใน ขั้นตอนการสอนกิจกรรมของนักเรียนมีความเหมาะสมพอดี

ผลการเรียนของนักเรียน

1. นักเรียนส่วนใหญ่มีความตั้งใจเรียน สืบเนื่องจากการสอบถาม ถาม-ตอบ ได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. นักเรียนส่วนใหญ่ทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากขึ้น
3. นักเรียนส่วนใหญ่มีคะแนนสอบสูงขึ้น

ผลการสอนของครู

1. มีเครื่องฉาย LCD Projector และสื่อ Powerpoint ทำให้สอนได้เร็วขึ้น สะดวกขึ้น
2. มีความมั่นใจในการสอนมากขึ้น
3. สอนได้ตามเวลาที่กำหนดของแผนการสอน

	แผนการสอน	หน่วยที่ 4
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์	สอนครั้งที่ 8–10
	ชื่อหน่วย บทที่ 4	ชั่วโมงรวม 36
ชื่อเรื่อง กฎของไซน์และโคไซน์		จำนวนชั่วโมง 6
หัวข้อเรื่อง บทที่ 4 กฎของไซน์และโคไซน์ (Law of Sine and Cosine) 4.1 กฎของไซน์ (Law of Sine) 4.2 กฎของโคไซน์ (Law of Cosine) 4.3 การประยุกต์ใช้กฎของไซน์และโคไซน์ (Application of Law of Sine and Cosine) สาระสำคัญ ในตรีโกณมิติ กฎของไซน์ (Law of Sine) คือสมการที่เป็นความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนความยาวของด้านสามเหลี่ยมใดๆ กับค่าไซน์ (Sine) ของมุมตรงข้าม และกฎของโคไซน์ เป็นการเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านสามเหลี่ยมกับโคไซน์ของมุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม สมรรถนะประจำหน่วย (การประยุกต์ใช้ ความรู้ ทักษะ คุณธรรม จริยธรรม จรรยาบรรณวิชาชีพ) 1. รู้และเข้าใจกฎของไซน์และโคไซน์ได้อย่างถูกต้อง 2. รู้และเข้าใจการประยุกต์ใช้กฎของไซน์และโคไซน์ได้อย่างถูกต้อง 3. ตอบคำถามขณะเรียน ได้อย่างถูกต้อง 4. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง และสำเร็จภายในเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผล ตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง		

	แผนการสอน	หน่วยที่ 4
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์	สอนครั้งที่ 8-10
	ชื่อหน่วย บทที่ 4	ชั่วโมงรวม 36
ชื่อเรื่อง กฎของโชน์และโคโชน์		จำนวนชั่วโมง 6
จุดประสงค์การสอน จุดประสงค์ทั่วไป 1. เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจกฎของโชน์ 2. เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจกฎของโคโชน์ 3. เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจการประยุกต์ใช้กฎของโชน์และโคโชน์ จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ด้านความรู้ 1. สามารถอธิบายกฎของโชน์ได้อย่างถูกต้อง 2. สามารถอธิบายกฎของโคโชน์ได้อย่างถูกต้อง 3. สามารถอธิบายการประยุกต์ใช้กฎของโชน์และโคโชน์ได้อย่างถูกต้อง ด้านทักษะ 4. ทำแบบฝึกหัดคำนวณประยุกต์ใช้กฎของโชน์และโคโชน์ หามุมแต่ละมุม และความยาวของด้านแต่ละด้าน ได้อย่างถูกต้อง ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง 5. ตอบคำถามขณะเรียนและทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง และสำเร็จภายในระยะเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง		

เนื้อหาสาระ

บทที่ 4 กฎของไซน์และโคไซน์ (Law of Sine and Cosine)

4.1 กฎของไซน์ (Law of Sine)

4.2 กฎของโคไซน์ (Law of Cosine)

4.3 การประยุกต์ใช้กฎของไซน์และโคไซน์ (Application of Law of Sine and Cosine)

กิจกรรมการเรียนการสอน	
ขั้นตอนการสอนหรือกิจกรรมของครู	ขั้นตอนการเรียนรู้หรือกิจกรรมของนักเรียน
1. ตรวจเช็ครายชื่อประจำวัน 2. ซักถามนักเรียน-นักศึกษาเป็นรายบุคคล 3. กล่าวนำก่อนเข้าเนื้อหา 4. อธิบายเนื้อหา 5. ซักถามนักเรียนเพิ่มเติม 6. สังเกตนักเรียนในระหว่างการสอน 7. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน 8. ให้นักเรียนไปศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติม 9. วัดผลและประเมินผลภาคทฤษฎี หมายเหตุ : อธิบายประกอบแผ่นใส หรือเครื่องฉาย LCD Projector	1. ตั้งใจฟังคำอธิบาย 2. จดบันทึกเพิ่มเติม 3. นักเรียนตอบคำถามเป็นรายบุคคล 4. นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน 5. สอบภาคทฤษฎี

งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม

ก่อนเรียน

1. ชี้แจงข้อตกลงในการเรียนวิชานี้ในระยะเวลาเรียน วิธีการให้คะแนน วิธีการตัดเกรด
2. ความประพฤติในห้องเรียน
3. การทำกิจกรรม การมอบหมายหน้าที่ความรับผิดชอบของแต่ละคนในห้องเรียน

ขณะเรียน

1. ให้นักเรียนตั้งใจฟังคำอธิบาย
2. ให้นักเรียนจดบันทึกเพิ่มเติม
3. ให้นักเรียนตอบคำถามเป็นรายบุคคล
4. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
5. นักเรียนสอบภาคทฤษฎี
6. สรุปผลการเรียน โดยการซัก-ถามปัญหาที่เกิดขึ้น

หลังเรียน

1. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
2. ให้นักเรียนกลับไปทบทวนความรู้ที่เกี่ยวกับบทเรียนที่เรียนไป
3. ให้นักเรียนค้นคว้าทำรายงาน
4. ให้นักเรียนกลับไปอ่านบทเรียนบทถัดไป

สื่อการเรียนการสอน

สื่อสิ่งพิมพ์

1. บุญธรรม ภัทราจารกุล. **คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ บริษัท ซีเอ็ดดูเคชั่น จำกัด (มหาชน), 2562. ใช้ประกอบการเรียนการสอนทุกชั้นตอนการสอน
2. แผ่นภาพ

สื่อโสตทัศน

1. เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ (Overhead Projector) หรือ LCD Projector
2. สื่อ Powerpoint หรือแผ่นใส
3. กระดานดำ
4. วีดีโอ
5. ทีวี

หุ่นจำลองหรือของจริง

- สถานการณ์จำลอง เพื่อฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์

แหล่งการเรียนรู้

ในสถานศึกษา

1. ห้องสมุด ได้แก่ หนังสือ ตำรา ที่เกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์
2. ครูผู้สอน
3. ค้นหาหาความรู้ทาง Internet

นอกสถานศึกษา

1. หอสมุดมหาวิทยาลัย
2. แหล่งเรียนรู้ชุมชน

การบูรณาการ/ความสัมพันธ์กับวิชาอื่น

1. วิชาเครื่องมือวัด
2. วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน
3. วิชาพลศึกษา

การประเมินผล

ก่อนเรียน

1. ตรวจสอบการแต่งกายของนักเรียน
2. มารยาทของนักเรียน
3. การสัมมาคารวะของนักเรียน
4. การถาม-ตอบ

ขณะเรียน

1. สังเกตพฤติกรรมการเรียน
2. ถาม-ตอบ
3. สังเกตความสนใจ

หลังเรียน

1. ทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
2. สอบเก็บคะแนน

บันทึกหลังการสอน

ผลการใช้แผนการสอน

1. เนื้อหามีความสอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
2. จำนวนที่กำหนดไว้ในหน่วยนี้ มีความเหมาะสมพอดี
3. กิจกรรมการสอนหรือวิธีการสอนใน ขั้นตอนการสอนกิจกรรมของนักเรียนมีความเหมาะสมพอดี

ผลการเรียนของนักเรียน

1. นักเรียนส่วนใหญ่มีความตั้งใจเรียน สังเกตจากการสอบถาม ถาม-ตอบ ได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. นักเรียนส่วนใหญ่ทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากขึ้น
3. นักเรียนส่วนใหญ่มีคะแนนสอบสูงขึ้น

ผลการสอนของครู

1. มีเครื่องฉาย LCD Projector และสื่อ Powerpoint ทำให้สอนได้เร็วขึ้น สะเอียดขึ้น
2. มีความมั่นใจในการสอนมากขึ้น
3. สอนได้ตามเวลาที่กำหนดของแผนการสอน

	แผนการสอน	หน่วยที่ 5
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์	สอนครั้งที่ 11-12
	ชื่อหน่วย บทที่ 5	ชั่วโมงรวม 36
ชื่อเรื่อง จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)		จำนวนชั่วโมง 4
หัวข้อเรื่อง บทที่ 5 จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number) 5.1 นิยามของจำนวนเชิงซ้อน 5.2 สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน (Algebraic Properties of Complex Numbers) 5.3 กราฟของจำนวนเชิงซ้อน (Graph of Complex Plane) 5.4 ระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinate System) 5.5 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว (Complex Numbers in Polar Form) สาระสำคัญ ระบบจำนวนเลข จะประกอบด้วยเลขจำนวน 2 ระบบ ได้แก่ ระบบจำนวนจริง (Real Number System) และระบบจำนวนเชิงซ้อน (Complex Number System) หรือเรียกว่า จำนวนจินตภาพ (Imaginary Number) ตัวเลขจำนวนจริง เป็นการรวมตัวเลขทั้งหมดของการวัดและจำนวนเชิงซ้อนคือ จำนวนที่ระบบจำนวนจริงไม่สามารถหาคำตอบของสมการที่มีรากของตัวเลขเป็นลบได้ เรียกว่า ส่วนจินตภาพ ใช้สัญลักษณ์ i สมรรถนะประจำหน่วย (การประยุกต์ใช้ความรู้ ทักษะ คุณธรรม จริยธรรม จรรยาบรรณวิชาชีพ) 1. รู้และเข้าใจนิยามจำนวนเชิงซ้อน สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนได้อย่างถูกต้อง 2. รู้และเข้าใจกราฟของจำนวนเชิงซ้อน ระบบพิกัดเชิงขั้ว และจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้อย่างถูกต้อง 3. ตอบคำถามขณะเรียนได้อย่างถูกต้อง 4. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้องและสำเร็จภายในเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง		

	แผนการสอน	หน่วยที่ 5
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์	สอนครั้งที่ 11-12
	ชื่อหน่วย บทที่ 5	ชั่วโมงรวม 36
ชื่อเรื่อง จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)		จำนวนชั่วโมง 4
จุดประสงค์การสอน จุดประสงค์ทั่วไป เพื่อให้ 1. มีความรู้ความเข้าใจนิยามของจำนวนเชิงซ้อน 2. มีความรู้ความเข้าใจสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน 3. มีความรู้ความเข้าใจกราฟของจำนวนเชิงซ้อน 4. มีความรู้ความเข้าใจระบบพิกัดเชิงขั้ว 5. มีความรู้ความเข้าใจจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ด้านความรู้ 1. สามารถอธิบายนิยามของจำนวนเชิงซ้อนได้อย่างถูกต้อง 2. สามารถอธิบายสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนได้อย่างถูกต้อง 3. สามารถอธิบายกราฟของจำนวนเชิงซ้อนได้อย่างถูกต้อง 4. สามารถอธิบายระบบพิกัดเชิงขั้วได้อย่างถูกต้อง 5. สามารถอธิบายจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้อย่างถูกต้อง ด้านทักษะ 6. ทำแบบฝึกหัดคำนวณหาผลลัพธ์ของจำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้วได้อย่างถูกต้อง ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง 7. ตอบคำถามขณะเรียนและทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้องและสำเร็จภายในระยะเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง		

เนื้อหาสาระ

บทที่ 5 จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)

5.1 นิยามของจำนวนเชิงซ้อน

5.2 สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน (Algebraic Properties of Complex Numbers)

5.2.1 การบวกและลบจำนวนเชิงซ้อน (Addition and Subtraction of Complex Numbers)

5.2.2 การคูณจำนวนเชิงซ้อน (Multiplication of Complex Numbers)

5.2.3 การหารจำนวนเชิงซ้อน (Dividing of Complex Numbers)

5.3 กราฟของจำนวนเชิงซ้อน (Graph of Complex Plane)

5.3.1 การเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อน

5.4 ระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinate System)

5.5 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว (Complex Numbers in Polar Form)

กิจกรรมการเรียนการสอน	
ขั้นตอนการสอนหรือกิจกรรมของครู	ขั้นตอนการเรียนรู้หรือกิจกรรมของนักเรียน
1. ตรวจเช็ครายชื่อประจำวัน 2. ซักถามนักเรียน-นักศึกษาเป็นรายบุคคล 3. กล่าวนำก่อนเข้าเนื้อหา 4. อธิบายเนื้อหา 5. ซักถามนักเรียนเพิ่มเติม 6. สังเกตนักเรียนในระหว่างการสอน 7. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน 8. ให้นักเรียนไปศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติม 9. วัดผลและประเมินผลภาคทฤษฎี หมายเหตุ : อธิบายประกอบแผ่นใสหรือเครื่องฉาย LCD Projector	1. ตั้งใจฟังคำอธิบาย 2. จดบันทึกเพิ่มเติม 3. นักเรียนตอบคำถามเป็นรายบุคคล 4. นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน 5. สอบภาคทฤษฎี

งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม

ก่อนเรียน

1. ชี้แจงข้อตกลงในการเรียนวิชานี้ในระยะเวลาเรียน วิธีการให้คะแนน วิธีการตัดเกรด
2. ความประพฤตินในห้องเรียน
3. การทำกิจกรรม การมอบหมายหน้าที่ความรับผิดชอบของแต่ละคนในห้องเรียน

ขณะเรียน

1. ให้นักเรียนตั้งใจฟังคำอธิบาย
2. ให้นักเรียนจดบันทึกเพิ่มเติม
3. ให้นักเรียนตอบคำถามเป็นรายบุคคล
4. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
5. นักเรียนสอบภาคทฤษฎี
6. สรุปผลการเรียนโดยการซัก-ถามปัญหาที่เกิดขึ้น

หลังเรียน

1. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
2. ให้นักเรียนกลับไปทบทวนความรู้ที่เกี่ยวกับบทเรียนที่เรียนไป
3. ให้นักเรียนค้นคว้าทำรายงาน
4. ให้นักเรียนกลับไปอ่านบทเรียนบทถัดไป

สื่อการเรียนการสอน

สื่อสิ่งพิมพ์

1. บุญธรรม ภัทราจารกุล. **คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ ซีเอ็ดดูเคชั่น จำกัด (มหาชน), 2562. ใช้ประกอบการเรียนการสอนทุกขั้นตอนการสอน
2. แผ่นภาพ

สื่อโสตทัศน

1. เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ (Overhead projector) หรือ LCD Projector
2. สื่อ Powerpoint หรือแผ่นใส
3. กระดานดำ
4. วีดีโอ
5. ทีวี

หุ่นจำลองหรือของจริง

- สถานการณ์จำลอง เพื่อฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์

แหล่งการเรียนรู้

ในสถานศึกษา

1. ห้องสมุด ได้แก่ หนังสือ ตำรา ที่เกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์
2. ครูผู้สอน
3. ค้นหาหาความรู้ทาง Internet

นอกสถานศึกษา

1. หอสมุดมหาวิทยาลัย
2. แหล่งเรียนรู้ชุมชน

การบูรณาการ/ความสัมพันธ์กับวิชาอื่น

1. วิชาเครื่องมือวัด
2. วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน
3. วิชาพลศึกษา

การประเมินผล

ก่อนเรียน

1. ตรวจสอบการแต่งกายของนักเรียน
2. มารยาทของนักเรียน
3. การสั้มาการวะของนักเรียน
4. การถาม-ตอบ

ขณะเรียน

1. สังเกตพฤติกรรมการเรียน
2. ถาม-ตอบ
3. สังเกตความสนใจ

หลังเรียน

1. ทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
2. สอบเก็บคะแนน

บันทึกหลังการสอน

ผลการใช้แผนการสอน

1. เนื้อหามีความสอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
2. จำนวนที่กำหนดไว้ในหน่วยนี้ มีความเหมาะสมพอดี
3. กิจกรรมการสอนหรือวิธีการสอนใน ขั้นตอนการสอนกิจกรรมของนักเรียนมีความเหมาะสมพอดี

ผลการเรียนของนักเรียน

1. นักเรียนส่วนใหญ่มีความตั้งใจเรียน สังเกตจากการสอบถาม ถาม-ตอบ ได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. นักเรียนส่วนใหญ่ทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากขึ้น
3. นักเรียนส่วนใหญ่มีคะแนนสอบสูงขึ้น

ผลการสอนของครู

1. มีเครื่องฉาย LCD Projector และสื่อ Powerpoint ทำให้สอนได้เร็วขึ้น สะเอียดขึ้น
2. มีความมั่นใจในการสอนมากขึ้น
3. สอนได้ตามเวลาที่กำหนดของแผนการสอน

	แผนการสอน	หน่วยที่ 6
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์	สอนครั้งที่ 11-12
	ชื่อหน่วย บทที่ 6	ชั่วโมงรวม 36
ชื่อเรื่อง เมทริกซ์ (Matrix)		จำนวนชั่วโมง 4
หัวข้อเรื่อง บทที่ 6 เมทริกซ์ (Matrix) 6.1 นิยามของเมทริกซ์ 6.2 ขนาดของเมทริกซ์ (Size of Matrix) 6.3 เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose of a Matrix) 6.4 การบวกลบเมตริกซ์ (Addition and Subtraction of Matrix) 6.5 การคูณเมทริกซ์ (Matrix Multiplication) สาระสำคัญ เมทริกซ์ (Matrix) คือแถวที่เป็นคู่ลำดับในตารางสี่เหลี่ยม ที่บรรจุตัวเลข สัญลักษณ์ หรือฟังก์ชัน โดยการจัดเรียงเป็นแถวในแนวนอน (Row) เรียกว่า แถวหรือโรว์ และแถวในแนวตั้ง (Columns) เรียกว่า หลักหรือคอลัมน์ เมทริกซ์ใช้ประยุกต์ แก่ระบบสมการเชิงเส้น การแปลงเชิงเส้น และพีชคณิตเชิงเส้น สมรรถนะประจำหน่วย (การประยุกต์ใช้ ความรู้ ทักษะ คุณธรรม จริยธรรม จรรยาบรรณวิชาชีพ) 1. รู้และเข้าใจนิยามของเมทริกซ์ ขนาดของเมทริกซ์ และชนิดของเมทริกซ์จัดรัสได้อย่างถูกต้อง 2. รู้และเข้าใจเมทริกซ์สลับเปลี่ยน การบวกลบเมตริกซ์ การคูณเมทริกซ์ และการเท่ากันของเมตริกซ์ได้อย่างถูกต้อง 3. ตอบคำถามขณะเรียนได้อย่างถูกต้อง 4. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง และสำเร็จภายในเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผล ตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง		

	แผนการสอน	หน่วยที่ 6
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์	สอนครั้งที่ 11–12
	ชื่อหน่วย บทที่ 6	ชั่วโมงรวม 36
ชื่อเรื่อง เมทริกซ์ (Matrix)		จำนวนชั่วโมง 4
จุดประสงค์การสอน จุดประสงค์ทั่วไป เพื่อให้ 1. มีความรู้ความเข้าใจนิยามของเมทริกซ์ 2. มีความรู้ความเข้าใจขนาดของเมทริกซ์ 3. มีความรู้ความเข้าใจเมทริกซ์สลับเปลี่ยน 4. มีความรู้ความเข้าใจการบวกลบเมทริกซ์ 5. มีความรู้ความเข้าใจการคูณเมทริกซ์ จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ด้านความรู้ 1. สามารถอธิบายนิยามของเมทริกซ์ได้อย่างถูกต้อง 2. สามารถอธิบายขนาดของเมทริกซ์ได้อย่างถูกต้อง 3. สามารถอธิบายเมทริกซ์สลับเปลี่ยนได้อย่างถูกต้อง 4. สามารถอธิบายการบวกลบเมทริกซ์และการคูณเมทริกซ์ได้อย่างถูกต้อง 5. สามารถอธิบายการคูณเมทริกซ์ได้อย่างถูกต้อง ด้านทักษะ 6. ทำแบบฝึกหัดคำนวณหาผลลัพธ์ของเมทริกซ์สลับเปลี่ยน การบวกลบเมทริกซ์ และการคูณเมทริกซ์ได้อย่างถูกต้อง ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง 7. ตอบคำถามขณะเรียนและทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง และสำเร็จภายในระยะเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง		

เนื้อหาสาระ

บทที่ 6 เมทริกซ์ (Matrix)

6.1 นิยามของเมทริกซ์

6.2 ขนาดของเมทริกซ์ (Size of Matrix)

6.2.1 เมทริกซ์แถว (Row Vector)

6.2.2 เมทริกซ์หลัก (Column Vector)

6.2.3 เมทริกซ์จัตุรัส (Square Matrix)

6.2.4 เมทริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix)

6.2.5 เมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonal Matrix)

6.2.6 เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix)

6.2.7 เมทริกซ์สามเหลี่ยม (Triangular Matrix)

6.3 เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose of a Matrix)

6.4 การบวกลบเมตริกซ์ (Addition and subtraction of Matrix)

6.4.1 การบวกเมตริกซ์

6.4.2 การลบเมตริกซ์

6.5 การคูณเมตริกซ์ (Matrix Multiplication)

6.5.1 การคูณเมตริกซ์ด้วยสเกลาร์ (Matrix Multiplication by a Scalar)

6.5.2 การคูณเมตริกซ์กับเมตริกซ์ (Matrix Multiplication)

กิจกรรมการเรียนการสอน	
ขั้นตอนการสอนหรือกิจกรรมของครู	ขั้นตอนการเรียนรู้หรือกิจกรรมของนักเรียน
1. ตรวจเช็ครายชื่อประจำวัน 2. ซักถามนักเรียน-นักศึกษาเป็นรายบุคคล 3. กล่าวนำก่อนเข้าเนื้อหา 4. อธิบายเนื้อหา 5. ซักถามนักเรียนเพิ่มเติม 6. สังเกตนักเรียนในระหว่างการสอน 7. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน 8. ให้นักเรียนไปศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติม 9. วัดผลและประเมินผลภาคทฤษฎี หมายเหตุ : อธิบายประกอบแผ่นใส หรือเครื่องฉาย LCD Projector	1. ตั้งใจฟังคำอธิบาย 2. จดบันทึกเพิ่มเติม 3. นักเรียนตอบคำถามเป็นรายบุคคล 4. นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน 5. สอบภาคทฤษฎี

งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม

ก่อนเรียน

1. ชี้แจงข้อตกลงในการเรียนวิชานี้ในเรื่องเวลาเรียน วิธีการให้คะแนน วิธีการตัดเกรด
2. ความประพฤตินในห้องเรียน
3. การทำกิจกรรม การมอบหมายหน้าที่ความรับผิดชอบของแต่ละคนในห้องเรียน

ขณะเรียน

1. ให้นักเรียนตั้งใจฟังคำอธิบาย
2. ให้นักเรียนจดบันทึกเพิ่มเติม
3. ให้นักเรียนตอบคำถามเป็นรายบุคคล
4. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
5. นักเรียนสอบภาคทฤษฎี
6. สรุปผลการเรียนโดยการซัก-ถามปัญหาที่เกิดขึ้น

หลังเรียน

1. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
2. ให้นักเรียนกลับไปทบทวนความรู้ที่เกี่ยวกับบทเรียนที่เรียนไป
3. ให้นักเรียนค้นคว้าทำรายงาน
4. ให้นักเรียนกลับไปอ่านบทเรียนบทถัดไป

สื่อการเรียนการสอน

สื่อสิ่งพิมพ์

1. บุญธรรม ภัทราจารกุล. **คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ บริษัท ซีเอ็ดดูเคชั่นจำกัด (มหาชน), 2562. ใช้ประกอบการเรียนการสอนทุกขั้นตอนการสอน
2. แผ่นภาพ

สื่อโสตทัศน

1. เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ (Overhead Projector) หรือ LCD Projector
2. สื่อ Powerpoint หรือแผ่นใส
3. กระดานดำ
4. วิดีโอ
5. ทีวี

หุ่นจำลองหรือของจริง

- สถานการณ์จำลอง เพื่อฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์

แหล่งการเรียนรู้

ในสถานศึกษา

1. ห้องสมุด ได้แก่ หนังสือ ตำรา ที่เกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์
2. ครูผู้สอน
3. ค้นหาหาความรู้ทาง Internet

นอกสถานศึกษา

1. หอสมุดมหาวิทยาลัย
2. แหล่งเรียนรู้ชุมชน

การบูรณาการ/ความสัมพันธ์กับวิชาอื่น

1. วิชาเครื่องมือวัด
2. วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน
3. วิชาพลศึกษา

การประเมินผล

ก่อนเรียน

1. ตรวจสอบการแต่งกายของนักเรียน
2. มารยาทของนักเรียน
3. การสั้มาการวะของนักเรียน
4. การถาม-ตอบ

ขณะเรียน

1. สังเกตพฤติกรรมการเรียน
2. ถาม-ตอบ
3. สังเกตความสนใจ

หลังเรียน

1. ทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
2. สอบเก็บคะแนน

บันทึกหลังการสอน

ผลการใช้แผนการสอน

1. เนื้อหามีความสอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
2. จำนวนที่กำหนดไว้ในหน่วยนี้ มีความเหมาะสมพอดี
3. กิจกรรมการสอนหรือวิธีการสอนใน ขั้นตอนการสอนกิจกรรมของนักเรียนมีความเหมาะสมพอดี

ผลการเรียนของนักเรียน

1. นักเรียนส่วนใหญ่มีความตั้งใจเรียน สังเกตจากการสอบถาม ถาม-ตอบได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. นักเรียนส่วนใหญ่ทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากขึ้น
3. นักเรียนส่วนใหญ่มีคะแนนสอบสูงขึ้น

ผลการสอนของครู

1. มีเครื่องฉาย LCD Projector และสื่อ Powerpoint ทำให้สอนได้เร็วขึ้น สะเอียดขึ้น
2. มีความมั่นใจในการสอนมากขึ้น
3. สอนได้ตามเวลาที่กำหนดของแผนการสอน

	แผนการสอน	หน่วยที่ 7
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์	สอนครั้งที่ 13–14
	ชื่อหน่วย บทที่ 7	ชั่วโมงรวม 36
ชื่อเรื่อง ดีเทอร์มิแนนต์		จำนวนชั่วโมง 4
หัวข้อเรื่อง บทที่ 7 ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants) 7.1 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 1×1 7.2 การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 7.3 การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีโดยตรง (Cross Product) 7.4 การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีการกระจาย (Cofactor) สาระสำคัญ ดีเทอร์มิแนนต์ คือฟังก์ชันหนึ่งที่ทำให้ผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์ ที่เป็นเมทริกซ์จัตุรัสคือ $m = n$ หรือมีมิติ $n \times n$ เท่านั้น ดีเทอร์มิแนนต์ มีความสำคัญในพีชคณิตเชิงเส้น (Linear Algebra) ในการหาคำตอบหรือหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น สมรรถนะประจำหน่วย (การประยุกต์ใช้ ความรู้ ทักษะ คุณธรรม จริยธรรม จรรยาบรรณวิชาชีพ) 1. รู้และเข้าใจการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 1×1, 2×2 ได้อย่างถูกต้อง 2. รู้และเข้าใจการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีโดยตรง และด้วยวิธีการกระจาย ได้อย่างถูกต้อง 3. ตอบคำถามขณะเรียน ได้อย่างถูกต้อง 4. ทำแบบฝึกหัด ได้อย่างถูกต้อง และสำเร็จภายในเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผล ตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง		

	แผนการสอน	หน่วยที่ 7
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์	สอนครั้งที่ 13-14
	ชื่อหน่วย บทที่ 7	ชั่วโมงรวม 36
ชื่อเรื่อง ดีเทอร์มิแนนต์		จำนวนชั่วโมง 4
จุดประสงค์การสอน จุดประสงค์ทั่วไป เพื่อให้ 1. มีความรู้ความเข้าใจดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 1×1 2. มีความรู้ความเข้าใจการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 3. มีความรู้ความเข้าใจการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีโดยตรงและด้วยวิธีการกระจาย (Cofactor) จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ด้านความรู้ 1. สามารถอธิบายดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 1×1 ได้อย่างถูกต้อง 2. สามารถอธิบายวิธีการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ได้อย่างถูกต้อง 3. สามารถอธิบายวิธีการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีโดยตรงและด้วยวิธีการกระจายได้อย่างถูกต้อง ด้านทักษะ 4. ทำแบบฝึกหัดคำนวณหาผลลัพธ์ของดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 1×1, 2×2 และ 3×3 ได้อย่างถูกต้อง ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง 5. ตอบคำถามขณะเรียนและทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง และสำเร็จภายในระยะเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง		

เนื้อหาสาระ

บทที่ 7 ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants)

7.1 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 1×1

7.2 การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2

7.3 การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีโดยตรง (Cross

Product)

7.4 การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีการกระจาย

(Cofactor)

กิจกรรมการเรียนการสอน	
ขั้นตอนการสอนหรือกิจกรรมของครู	ขั้นตอนการเรียนรู้หรือกิจกรรมของนักเรียน
1. ตรวจเช็ครายชื่อประจำวัน 2. ซักถามนักเรียน-นักศึกษาเป็นรายบุคคล 3. กล่าวนำก่อนเข้าเนื้อหา 4. อธิบายเนื้อหา 5. ซักถามนักเรียนเพิ่มเติม 6. สังเกตนักเรียนในระหว่างการสอน 7. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน 8. ให้นักเรียนไปศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติม 9. วัดผลและประเมินผลภาคทฤษฎี หมายเหตุ : อธิบายประกอบแผ่นใส หรือเครื่องฉาย LCD Projector	1. ตั้งใจฟังคำอธิบาย 2. จดบันทึกเพิ่มเติม 3. นักเรียนตอบคำถามเป็นรายบุคคล 4. นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน 5. สอบภาคทฤษฎี

งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม

ก่อนเรียน

1. ชี้แจงข้อตกลงในการเรียนวิชานี้ในระยะเวลาเรียน วิธีการให้คะแนน วิธีการตัดเกรด
2. ความประพฤติในห้องเรียน
3. การทำกิจกรรม การมอบหมายหน้าที่ความรับผิดชอบของแต่ละคนในห้องเรียน

ขณะเรียน

1. ให้นักเรียนตั้งใจฟังคำอธิบาย
2. ให้นักเรียนจดบันทึกเพิ่มเติม
3. ให้นักเรียนตอบคำถามเป็นรายบุคคล
4. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
5. นักเรียนสอบภาคทฤษฎี
6. สรุปผลการเรียนโดยการซัก-ถามปัญหาที่เกิดขึ้น

หลังเรียน

1. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
2. ให้นักเรียนกลับไปทบทวนความรู้ที่เกี่ยวกับบทเรียนที่เรียนไป
3. ให้นักเรียนค้นคว้าทำรายงาน
4. ให้นักเรียนกลับไปอ่านบทเรียนบทถัดไป

สื่อการเรียนการสอน

สื่อสิ่งพิมพ์

1. บุญธรรม ภัทราจารุกล. คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ บริษัท ซีเอ็ดยูเคชั่น จำกัด (มหาชน), 2562. ใช้ประกอบการเรียนการสอนทุกขั้นตอนการสอน
2. แผ่นภาพ

สื่อโสตทัศน

1. เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ (Overhead Projector) หรือ LCD Projector
2. สื่อ Powerpoint หรือแผ่นใส
3. กระดานดำ
4. วิดีโอ
5. ทีวี

หุ่นจำลองหรือของจริง

- สถานการณ์จำลอง เพื่อฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์

แหล่งการเรียนรู้

ในสถานศึกษา

1. ห้องสมุด ได้แก่ หนังสือ ตำรา ที่เกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์
2. ครูผู้สอน
3. ค้นหาหาความรู้ทาง Internet

นอกสถานศึกษา

1. หอสมุดมหาวิทยาลัย
2. แหล่งเรียนรู้ชุมชน

การบูรณาการ/ความสัมพันธ์กับวิชาอื่น

1. วิชาเครื่องมือวัด
2. วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน
3. วิชาพลศึกษา

การประเมินผล

ก่อนเรียน

1. ตรวจสอบการแต่งกายของนักเรียน
2. มารยาทของนักเรียน
3. การสัมมาคารวะของนักเรียน
4. การถามตอบ

ขณะเรียน

1. สังเกตพฤติกรรมการเรียน
2. ถาม-ตอบ
3. สังเกตความสนใจ

หลังเรียน

1. ทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
2. สอบเก็บคะแนน

บันทึกหลังการสอน

ผลการใช้แผนการสอน

1. เนื้อหามีความสอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
2. จำนวนที่กำหนดไว้ในหน่วยนี้ มีความเหมาะสมพอดี
3. กิจกรรมการสอนหรือวิธีการสอนใน ขั้นตอนการสอนกิจกรรมของนักเรียนมีความเหมาะสมพอดี

ผลการเรียนของนักเรียน

1. นักเรียนส่วนใหญ่มีความตั้งใจเรียน สืบเนื่องจากการสอบถาม ถาม-ตอบ ได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. นักเรียนส่วนใหญ่ทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากขึ้น
3. นักเรียนส่วนใหญ่มีคะแนนสอบสูงขึ้น

ผลการสอนของครู

1. มีเครื่องฉาย LCD Projector และสื่อ Powerpoint ทำให้สอนได้เร็วขึ้น สะเอียดขึ้น
2. มีความมั่นใจในการสอนมากขึ้น
3. สอนได้ตามเวลาที่กำหนดของแผนการสอน

	แผนการสอน	หน่วยที่ 8
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์	สอนครั้งที่ 15-17
	ชื่อหน่วย บทที่ 8	ชั่วโมงรวม 36
ชื่อเรื่อง การประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น		จำนวนชั่วโมง 6
หัวข้อเรื่อง บทที่ 8 การประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 8.1 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยดีเทอร์มิแนนต์ 8.2 การประยุกต์แก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยดีเทอร์มิแนนต์ สาระสำคัญ ระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร จะต้องมีส่วนการอย่างน้อย 2 ส่วน การจึงจะหาคำตอบของตัวแปร 2 ตัวแปรได้ และสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร จะต้องมีส่วนการอย่างน้อย 3 ส่วน การจึงจะหาคำตอบของตัวแปร 3 ตัวแปรได้ โดยตัวแปรทุกตัวในสมการ จะต้องอยู่ในรูปกำลังหนึ่ง การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของระบบสมการเชิงเส้น เป็นการพิจารณาสมการที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรชุดเดียวกันทั้งหมดร่วมกัน สมรรถนะประจำหน่วย (การประยุกต์ใช้ ความรู้ ทักษะ คุณธรรม จริยธรรม จรรยาบรรณวิชาชีพ) 1. รู้และเข้าใจการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยดีเทอร์มิแนนต์ได้อย่างถูกต้อง 2. รู้และเข้าใจการประยุกต์แก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยดีเทอร์มิแนนต์ได้อย่างถูกต้อง 3. ตอบคำถามขณะเรียนได้อย่างถูกต้อง 4. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง และสำเร็จภายในเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผล ตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง		

	แผนการสอน	หน่วยที่ 8
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์	สอนครั้งที่ 15-17
	ชื่อหน่วย บทที่ 8	ชั่วโมงรวม 36
ชื่อเรื่อง การประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น		จำนวนชั่วโมง 6
จุดประสงค์การสอน จุดประสงค์ทั่วไป เพื่อให้ 1. มีความรู้ความเข้าใจการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยดีเทอร์มิแนนต์ 2. มีความรู้ความเข้าใจการประยุกต์แก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยดีเทอร์มิแนนต์ จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ด้านความรู้ 1. สามารถอธิบายการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยดีเทอร์มิแนนต์ได้อย่างถูกต้อง 2. สามารถอธิบายการประยุกต์แก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยดีเทอร์มิแนนต์ได้อย่างถูกต้อง ด้านทักษะ 3. ทำแบบฝึกหัดคำนวณแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยการแทนค่าตัวแปร ด้วยการกำจัดตัวแปร และด้วยกฎของเครเมอร์ได้อย่างถูกต้อง ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง 4. ตอบคำถามขณะเรียนและทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง และสำเร็จภายในระยะเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง		

เนื้อหาสาระ

บทที่ 8 การประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

8.1 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยดีเทอร์มิแนนต์

8.1.1 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยดีเทอร์มิแนนต์ที่มี 2 ตัวแปร

8.1.2 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยดีเทอร์มิแนนต์ที่มี 3 ตัวแปร

8.2 การประยุกต์แก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยดีเทอร์มิแนนต์

กิจกรรมการเรียนการสอน	
ขั้นตอนการสอนหรือกิจกรรมของครู	ขั้นตอนการเรียนรู้หรือกิจกรรมของนักเรียน
1. ตรวจเช็ครายชื่อประจำวัน 2. ซักถามนักเรียน-นักศึกษาเป็นรายบุคคล 3. กล่าวนำก่อนเข้าเนื้อหา 4. อธิบายเนื้อหา 5. ซักถามนักเรียนเพิ่มเติม 6. สังเกตนักเรียนในระหว่างการสอน 7. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน 8. ให้นักเรียนไปศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติม 9. วัดผลและประเมินผลภาคทฤษฎี หมายเหตุ : อธิบายประกอบแผ่นใส หรือเครื่องฉาย LCD Projector	1. ตั้งใจฟังคำอธิบาย 2. จดบันทึกเพิ่มเติม 3. นักเรียนตอบคำถามเป็นรายบุคคล 4. นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน 5. สอบภาคทฤษฎี

งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม

ก่อนเรียน

1. ชี้แจงข้อตกลงในการเรียนวิชานี้ในเรื่องเวลาเรียน วิธีการให้คะแนน วิธีการตัดเกรด
2. ความประพฤตินในห้องเรียน
3. การทำกิจกรรม การมอบหมายหน้าที่ความรับผิดชอบของแต่ละคนในห้องเรียน

ขณะเรียน

1. ให้นักเรียนตั้งใจฟังคำอธิบาย
2. ให้นักเรียนจดบันทึกเพิ่มเติม
3. ให้นักเรียนตอบคำถามเป็นรายบุคคล
4. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
5. นักเรียนสอบภาคทฤษฎี
6. สรุปผลการเรียนโดยการซัก-ถามปัญหาที่เกิดขึ้น

หลังเรียน

1. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
2. ให้นักเรียนกลับไปทบทวนความรู้ที่เกี่ยวกับบทเรียนที่เรียนไป
3. ให้นักเรียนค้นคว้าทำรายงาน
4. ให้นักเรียนกลับไปอ่านบทเรียนบทถัดไป

สื่อการเรียนการสอน

สื่อสิ่งพิมพ์

1. บุญธรรม ภัทราจารกุล. **คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ บริษัท ซีเอ็ดดูเคชั่น จำกัด (มหาชน), 2562. ใช้ประกอบการเรียนการสอนทุกขั้นตอนการสอน
2. แผ่นภาพ

สื่อโสตทัศน

1. เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ (Overhead Projector) หรือ LCD Projector
2. สื่อ Powerpoint หรือแผ่นใส
3. กระดานดำ
4. วิดีโอ
5. ทีวี

หุ่นจำลองหรือของจริง

- สถานการณ์จำลอง เพื่อฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์

แหล่งการเรียนรู้

ในสถานศึกษา

1. ห้องสมุด ได้แก่ หนังสือ ตำรา ที่เกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์
2. ครูผู้สอน
3. ค้นหาหาความรู้ทาง Internet

นอกสถานศึกษา

1. หอสมุดมหาวิทยาลัย
2. แหล่งเรียนรู้ชุมชน

การบูรณาการ/ความสัมพันธ์กับวิชาอื่น

1. วิชาเครื่องมือวัด
2. วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน
3. วิชาพลศึกษา

การประเมินผล

ก่อนเรียน

1. ตรวจสอบการแต่งกายของนักเรียน
2. มารยาทของนักเรียน
3. การสัมมาคารวะของนักเรียน
4. การถาม-ตอบ

ขณะเรียน

1. สังเกตพฤติกรรมการเรียน
2. ถาม-ตอบ
3. สังเกตความสนใจ

หลังเรียน

1. ทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
2. สอบเก็บคะแนน

บันทึกหลังการสอน

ผลการใช้แผนการสอน

1. เนื้อหามีความสอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
2. จำนวนที่กำหนดไว้ในหน่วยนี้ มีความเหมาะสมพอดี
3. กิจกรรมการสอนหรือวิธีการสอนใน ขั้นตอนการสอนกิจกรรมของนักเรียนมีความเหมาะสมพอดี

ผลการเรียนของนักเรียน

1. นักเรียนส่วนใหญ่มีความตั้งใจเรียน สืบเนื่องจากการสอบถาม ถาม-ตอบ ได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. นักเรียนส่วนใหญ่ทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากขึ้น
3. นักเรียนส่วนใหญ่มีคะแนนสอบสูงขึ้น

ผลการสอนของครู

1. มีเครื่องฉาย LCD Projector และสื่อ Powerpoint ทำให้สอนได้เร็วขึ้น สะดวกขึ้น
2. มีความมั่นใจในการสอนมากขึ้น
3. สอนได้ตามเวลาที่กำหนดของแผนการสอน

	แผนการสอน	หน่วยที่ 9
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์	สอนครั้งที่ 18
	ชื่อหน่วย หลักการเศรษฐกิจพอเพียง	ชั่วโมงรวม 36
ชื่อเรื่อง หลักการเศรษฐกิจพอเพียง		จำนวนชั่วโมง 2
หัวข้อเรื่อง หลักการเศรษฐกิจพอเพียง สาระสำคัญ 1. ความหมายและความสำคัญของหลักการเศรษฐกิจพอเพียง 2. การนำหลักการเศรษฐกิจพอเพียงไปใช้งาน สมรรถนะประจำหน่วย (การประยุกต์ใช้ความรู้ ทักษะ คุณธรรม จริยธรรม จรรยาบรรณ วิชาชีพ) 1. รู้และเข้าใจความหมายและความสำคัญของหลักการเศรษฐกิจพอเพียงได้อย่างถูกต้อง 2. รู้และเข้าใจการนำหลักการเศรษฐกิจพอเพียงไปใช้งานได้อย่างถูกต้อง 3. ตอบคำถามขณะเรียนได้อย่างถูกต้อง 4. รู้วิธีการนำหลักการเศรษฐกิจพอเพียงไปใช้งานได้อย่างถูกต้องและสำเร็จภายในเวลาที่กำหนด อย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง		

	แผนการสอน	หน่วยที่ 9
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์	สอนครั้งที่ 18
	ชื่อหน่วย หลักการเศรษฐกิจพอเพียง	ชั่วโมงรวม 36
ชื่อเรื่อง หลักการเศรษฐกิจพอเพียง		จำนวนชั่วโมง 2
จุดประสงค์การสอน จุดประสงค์ทั่วไป 1. เพื่อให้รู้ถึงความหมายและความสำคัญของหลักการเศรษฐกิจพอเพียง 2. เพื่อให้สามารถนำกระดาษ A4 ที่ใช้แล้วกลับมาใช้ใหม่ 3. เพื่อให้สามารถใช้กระดาษ A4 ได้อย่างคุ้มค่า ด้านความรู้ 1. บอกความหมายและความสำคัญของหลักการเศรษฐกิจพอเพียงได้อย่างถูกต้อง 2. บอกวิธีการนำหลักการเศรษฐกิจพอเพียงไปใช้งานได้อย่างถูกต้อง ด้านทักษะ 1. สามารถบอกความหมายและความสำคัญของหลักการเศรษฐกิจพอเพียงได้อย่างถูกต้อง 2. สามารถนำกระดาษ A4 ที่ใช้แล้วกลับมาใช้ใหม่ได้อย่างถูกต้อง 3. สามารถใช้กระดาษ A4 มาประยุกต์ใช้งานได้อย่างถูกต้อง ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง 4. ตอบคำถามขณะเรียน และปฏิบัติตามหลักการเศรษฐกิจพอเพียงได้ถูกต้องและสำเร็จ ภายในระยะเวลาที่กำหนดอย่างมีเหตุและผลตามหลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง		

เนื้อหาสาระ

1. ความหมายและความสำคัญของหลักการเศรษฐกิจพอเพียง
2. การนำหลักการเศรษฐกิจพอเพียงไปใช้งาน

กิจกรรมการเรียนการสอน	
ขั้นตอนการสอนหรือกิจกรรมของครู	ขั้นตอนการเรียนรู้หรือกิจกรรมของนักเรียน
1. ตรวจเช็ครายชื่อประจำวัน 2. ซักถามนักเรียน-นักศึกษาเป็นรายบุคคล 3. กล่าวนำก่อนเข้าเนื้อหา 4. อธิบายเนื้อหา 5. ซักถามนักเรียนเพิ่มเติม 6. สังเกตนักเรียนในระหว่างการสอน 7. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน 8. ให้นักเรียนไปศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติม 9. วัดผลและประเมินผลภาคทฤษฎี หมายเหตุ : อธิบายประกอบแผ่นใส หรือเครื่องฉาย LCD Projector	1. ตั้งใจฟังคำอธิบาย 2. จดบันทึกเพิ่มเติม 3. นักเรียนตอบคำถามเป็นรายบุคคล 4. นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน 5. สอบภาคทฤษฎี

งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม

ก่อนเรียน

1. ชี้แจงข้อตกลงในการเรียนวิชานี้ในเรื่องเวลาเรียน วิธีการให้คะแนน วิธีการตัดเกรด
2. ความประพฤติในห้องเรียน
3. การทำกิจกรรม การมอบหมายหน้าที่ความรับผิดชอบของแต่ละคนในห้องเรียน

ขณะเรียน

1. ให้นักเรียนตั้งใจฟังคำอธิบาย
2. ให้นักเรียนจดบันทึกเพิ่มเติม
3. ให้นักเรียนตอบคำถามเป็นรายบุคคล
4. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
5. นักเรียนสอบภาคทฤษฎี
6. สรุปผลการเรียนโดยการซัก-ถามปัญหาที่เกิดขึ้น

หลังเรียน

1. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
2. ให้นักเรียนกลับไปทบทวนความรู้ที่เกี่ยวกับบทเรียนที่เรียนไป
3. ให้นักเรียนค้นคว้าทำรายงาน
4. ให้นักเรียนกลับไปอ่านบทเรียนบทถัดไป

สื่อการเรียนการสอน

สื่อสิ่งพิมพ์

1. บุญธรรม ภัทราจารกุล. **คณิตศาสตร์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ บริษัท ซีเอ็ดดูเคชั่น จำกัด (มหาชน), 2562. ใช้ประกอบการเรียนการสอนทุกชั้นตอนการสอน
2. แผ่นภาพ

สื่อโสตทัศน

1. เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ (Overhead projector) หรือ LCD Projector
2. สื่อ Powerpoint หรือแผ่นใส
3. กระดานดำ
4. วิดีโอ
5. ทีวี

หุ่นจำลองหรือของจริง

- สถานการณ์จำลอง เพื่อฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์

แหล่งการเรียนรู้

ในสถานศึกษา

1. ห้องสมุด ได้แก่ หนังสือ ตำรา ที่เกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์
2. ครูผู้สอน
3. ค้นหาหาความรู้ทาง Internet

นอกสถานศึกษา

1. หอสมุดมหาวิทยาลัย
2. แหล่งเรียนรู้ชุมชน

การบูรณาการ/ความสัมพันธ์กับวิชาอื่น

1. วิชาเครื่องมือวัด
2. วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน
3. วิชากลศาสตร์

การประเมินผล

ก่อนเรียน

1. ตรวจสอบการแต่งกายของนักเรียน
2. มารยาทของนักเรียน
3. การสัมมาคารวะของนักเรียน
4. การถามตอบ

ขณะเรียน

1. สังเกตพฤติกรรมการเรียน
2. ถาม-ตอบ
3. สังเกตความสนใจ

หลังเรียน

1. ทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
2. สอบเก็บคะแนน

บันทึกหลังการสอน

ผลการใช้แผนการสอน

1. เนื้อหามีความสอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
2. จำนวนที่กำหนดไว้ในหน่วยนี้ มีความเหมาะสมพอดี
3. กิจกรรมการสอนหรือวิธีการสอนใน ขั้นตอนการสอนกิจกรรมของนักเรียนมีความเหมาะสมพอดี

ผลการเรียนของนักเรียน

1. นักเรียนส่วนใหญ่มีความตั้งใจเรียน สังเกตจากการสอบถาม ถาม-ตอบ ได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. นักเรียนส่วนใหญ่ทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากขึ้น
3. นักเรียนส่วนใหญ่มีคะแนนสอบสูงขึ้น

ผลการสอนของครู

1. มีเครื่องฉาย LCD Projector และสื่อ Powerpoint ทำให้สอนได้เร็วขึ้น สะเอียดขึ้น
2. มีความมั่นใจในการสอนมากขึ้น
3. สอนได้ตามเวลาที่กำหนดของแผนการสอน

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 1 มุมและการวัดมุม

ตอนที่ 1 จงเติมคำถามต่อไปนี้ให้ถูกต้อง

1. มุมที่เกิดจากปลายเส้นตรง 2 เส้นเชื่อมกันที่จุดจุดหนึ่ง เรียกว่ามุมอะไร

(จุดยอดมุม (Vertex))

2. หน่วยในการวัดมุมมี 2 หน่วย ได้แก่หน่วยอะไร

(หน่วยองศา (Degree) และหน่วยเรเดียน (Radian เขียนย่อว่า Rad))

3. 1 องศา เท่ากับกี่ลิปดา (60 ลิปดา)

1 ลิปดา เท่ากับกี่ฟิลิปดา (60 ฟิลิปดา)

1 ฟิลิปดา เท่ากับกี่องศา ($60 \times 60 = 3,600$ องศา)

4. 1° เท่ากับกี่ rad

$$\left[\frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} \right]$$

5. 1 rad เท่ากับกี่องศา

$$\left[\frac{180^\circ}{\pi} \text{ องศา} \right]$$

6. 180° เท่ากับกี่ rad

(π rad)

7. 360° เท่ากับกี่ rad

(2π rad)

8. เรเดียน คืออะไร

(คือหน่วยวัดมุมชนิดหนึ่งบนระนาบสองมิติในหน่วยเรเดียน)

9. องศา คืออะไร

(คือหน่วยวัดมุมชนิดหนึ่งบนระนาบสองมิติ โดยใน 1 วงกลมจะแบ่งออกเป็น 360 องศา)

10. π มีค่าเท่ากับเท่าไร

$$\left(\frac{22}{7} = 3.14 \right)$$

ตอนที่ 2 จงแสดงวิธีการคำนวณ

1. จงแปลงมุมองศาจุดทศนิยม 35.1675° เป็นองศาลิปดาและฟิลิปดา

วิธีทำ เนื่องด้วย 1 องศา = 60 ลิปดา

∴ ให้คูณตัวเลขหลังจุดทศนิยม ซึ่งเป็นค่าลิปดาด้วย 60

$$0.1675 \times 60 = 10.05 \text{ ลิปดา}$$

และ 1 ลิปดา = 60 ฟิลิปดา

∴ ให้คูณตัวเลขหลังจุดทศนิยมคือ 0.05 ด้วย 60 ซึ่งเป็นค่าฟิลิปดา

$$0.05 \times 60 = 3 \text{ ฟิลิปดา}$$

ดังนั้น 35.1675° จึงเท่ากับ 35 องศา 10 ลิปดา 3 ฟิลิปดา หรือเท่ากับ $35^\circ 10' 3''$

ตอบ

2. จงแปลงองศาลิปดา ฟิลิปดา $54^\circ 45' 48''$ ให้เป็นองศาทศนิยม

วิธีทำ $54^\circ 45' 48'' = 54^\circ + \left(\frac{45}{60} + \frac{48}{3,600} \right)$

$$= 54^\circ + (0.75 + 0.0133)$$

$$= 54.7633^\circ$$

ตอบ

3. จงเปลี่ยนมุม 55 องศา ให้เป็นหน่วย rad

วิธีทำ $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad}$

$$55^\circ = \frac{55 \times \pi}{180^\circ} = \frac{55 \times 3.143}{180^\circ}$$

$$= 0.96 \text{ rad}$$

ตอบ

4. จงเปลี่ยนมุม 150 องศา ให้เป็นหน่วย rad

วิธีทำ $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad}$

$$150^\circ = \frac{150^\circ \times \pi}{180^\circ}$$

$$= \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

ตอบ

5. จงเปลี่ยนมุม 1.3 rad ให้เป็นหน่วยองศา

วิธีทำ $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \text{ องศา}$

$$\begin{aligned} 1.3 \text{ rad} &= \frac{1.3 \times 180^\circ}{\pi} \\ &= 74.45^\circ \end{aligned}$$

ตอบ

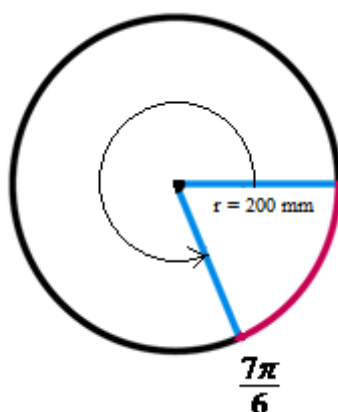
6. จงเปลี่ยนมุม $\frac{11\pi}{6}$ rad ให้เป็นหน่วยองศา

วิธีทำ $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \text{ องศา}$

$$\begin{aligned} \frac{11\pi}{6} \text{ rad} &= \frac{11\pi}{6} \times \frac{180^\circ}{\pi} \\ &= 330^\circ \end{aligned}$$

ตอบ

7. วงกลมวงหนึ่งมีรัศมี 200 mm เมื่อวัดไปเป็นมุม $\frac{7\pi}{6}$ จงคำนวณหาความยาวของเส้นโค้งนี้



วิธีทำ จาก $s = r\theta$

แทนค่า $s = (200 \text{ mm}) \frac{7\pi}{6}$

$$s = 733.37 \text{ mm}$$

ตอบ

8. เชือกเส้นหนึ่งพันรอบรอก ซึ่งมีรัศมี 350 มิลลิเมตร เมื่อหมุนรอกไปเป็นมุม 210° จงคำนวณหาความยาวของเส้นเชือกนี้

วิธีทำ ต้องเปลี่ยนมุมจากองศาเป็น rad

$$210^\circ = \frac{210^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{210^\circ \times 3.143}{180^\circ} = 3.67 \text{ rad}$$

จาก $s = r\theta$

แทนค่า $s = (350 \text{ mm})(3.67 \text{ rad})$

$$s = 1,284.5 \text{ mm}$$

ตอบ

9. วัวตัวหนึ่งถูกผูกเชือกไว้กับเสา ถ้าวัวตัวนี้เดินไปเป็นระยะทาง 7.5 เมตร โดยที่เชือกตึงและเชือกกวาดไปเป็นมุม $\frac{4\pi}{3}$ เรเดียน เชือกที่ใช้ผูกวัวตัวนี้ไว้กับเสามีความยาวเท่าไร

วิธีทำ จาก

$$s = r\theta$$

แทนค่า

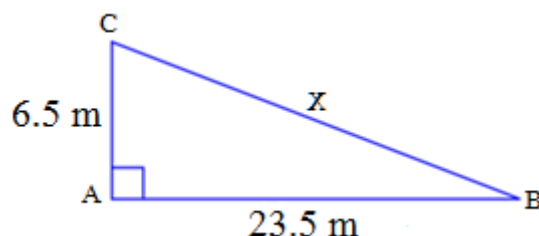
$$\begin{aligned} r &= \frac{s}{\theta} \\ r &= \frac{7.5 \text{ m}}{\frac{4\pi}{3}} \\ r &= \frac{7.5 \text{ m} \times 3}{4\pi} \\ r &= 1.79 \text{ m} \end{aligned}$$

ตอบ

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 2 ตรีโกณมิติ

จงแสดงวิธีการคำนวณ

1. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีความยาวของด้านดังแสดงในรูป จงใช้ทฤษฎีพีทาโกรัสหาความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก



วิธีทำ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$x^2 = AB^2 + BC^2$$

แทนค่า

$$x^2 = 23.5^2 + 6.5^2$$

$$x = \sqrt{23.5^2 + 6.5^2}$$

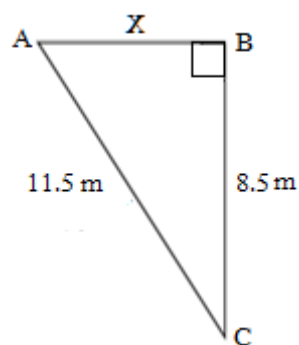
$$x = \sqrt{552.25 + 42.25}$$

$$x = \sqrt{594.5}$$

$$x = 24.38 \text{ m}$$

ตอบ

2. จงคำนวณหาพื้นที่สามเหลี่ยมดังแสดงในรูป



วิธีทำ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$c^2 = a^2 + b^2$$

แทนค่า

$$(11.5)^2 = x^2 + (8.5)^2$$

$$x^2 = (11.5)^2 - (8.5)^2$$

$$x = \sqrt{(11.5)^2 - (8.5)^2}$$

$$x = \sqrt{132.25 - 72.25}$$

$$x = \sqrt{60}$$

$$x = 7.75 \text{ m}$$

$$\text{พื้นที่ } \Delta = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$

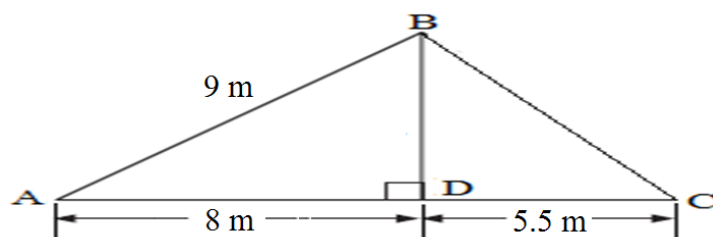
แทนค่า

$$\text{พื้นที่ } \Delta = \frac{1}{2} \times 7.75 \text{ m} \times 8.5 \text{ m}$$

$$\text{พื้นที่ } \Delta = 32.94 \text{ m}$$

ตอบ

3. โครงหลังคาบ้านหลังหนึ่งทำจากเหล็กรูปตัวซี มีขนาดดังแสดงในรูป จงใช้ทฤษฎีพีทาโกรัสหาความยาวของเหล็กรูปตัวซีทั้งหมดที่ใช้ทำโครงหลังคาบ้านหลังนี้



วิธีทำ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2$$

$$(BD)^2 = (AB)^2 - (AD)^2$$

แทนค่า

$$(BD)^2 = 9^2 - 8^2$$

$$BD = \sqrt{9^2 - 8^2}$$

$$BD = \sqrt{81 - 64}$$

$$BD = \sqrt{17}$$

$$BD = 4.123 \text{ m}$$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$(BC)^2 = (CD)^2 + (BD)^2$$

แทนค่า

$$(BC)^2 = 5.5^2 + 4.123^2$$

$$BC = \sqrt{5.5^2 + 4.123^2}$$

$$BC = \sqrt{30.25 + 17}$$

$$BC = \sqrt{47.25}$$

$$BC = 6.874 \text{ m}$$

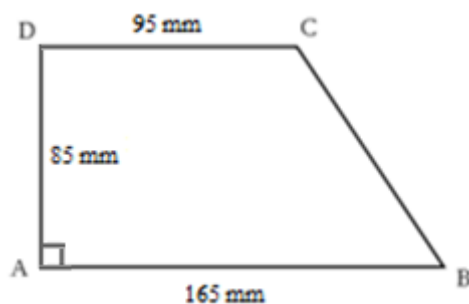
ความยาวของเหล็กที่ใช้ทำโครงหลังคาบ้าน = AC + AB + BC + BD

$$= 13.5 \text{ m} + 9 \text{ m} + 6.874 \text{ m} + 4.123 \text{ m}$$

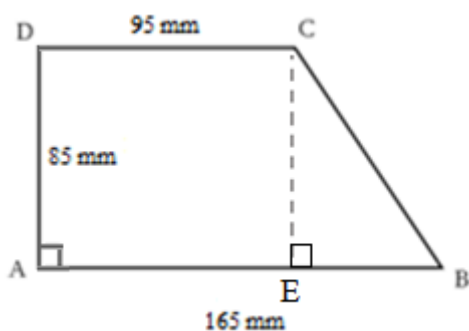
$$= 33.497 \text{ m}$$

ตอบ

4. จงหาเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ดังแสดงในรูป



วิธีทำ เขียนรูปใหม่เพื่อให้สะดวกในการคำนวณ



จากรูปใหม่ $CE = 85 \text{ mm}$, $BE = 165 - 95 = 70 \text{ mm}$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส $(BC)^2 = (BE)^2 + (CE)^2$

แทนค่า $(BC)^2 = 70^2 + 85^2$

$$BC = \sqrt{70^2 + 85^2}$$

$$BC = \sqrt{4,900 + 7,225}$$

$$BC = \sqrt{12,125}$$

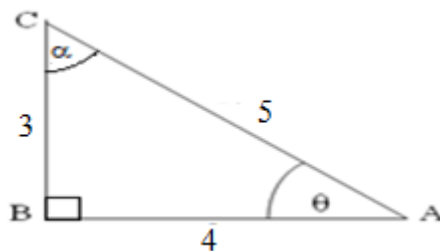
$$BC = 110.11 \text{ mm}$$

สูตร เส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $P = AB + BC + CD + DA$

แทนค่า $P = 165 + 110.11 + 95 + 85$

$$P = 455.11 \text{ mm} \quad \text{ตอบ}$$

5. จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ จงหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของ $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ และ $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$



วิธีทำ

$$\sin \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{4}{5}$$

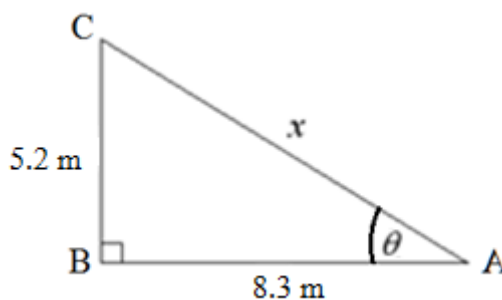
$$\cos \theta = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{3}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{3}{4}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{4}{3}$$

6. จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ จงหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของ $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$



วิธีทำ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส
แทนค่า

$$x^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$x^2 = (8.3)^2 + (5.2)^2$$

$$x^2 = 68.89 + 27.04$$

$$x^2 = 95.93$$

$$x = \sqrt{95.93}$$

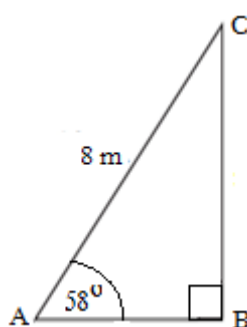
$$x = 9.79 \text{ m}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}\theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}\theta} = \frac{5.2}{9.79} \quad \text{ตอบ}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}\theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}\theta} = \frac{8.3}{9.79} \quad \text{ตอบ}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}\theta}{\text{ด้านประชิดมุม}\theta} = \frac{5.2}{8.3} \quad \text{ตอบ}$$

7. จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 8 m จงหาความยาวด้าน BC และด้าน AC โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ



วิธีทำ

$$\sin \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}\theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}\theta} = \frac{BC}{AC}$$

$$AC \sin \theta = BC$$

$$BC = AC \sin \theta$$

แทนค่า

$$BC = (8\text{m}) \sin(58^\circ)$$

$$BC = 6.78 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

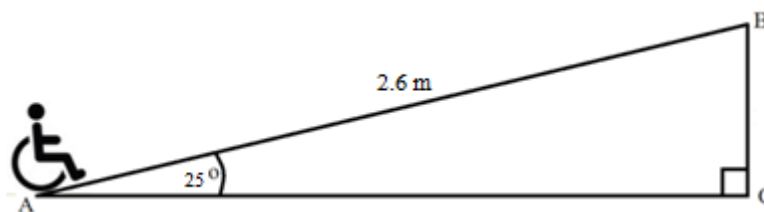
$$\cos \theta = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}\theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}\theta} = \frac{AB}{AC}$$

$$AC \cos \theta = AB$$

$$AB = (8 \text{ m}) \cos(58^\circ)$$

$$AB = 4.24 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

8. ต้องการสร้างพื้นเอียงแห่งหนึ่งสำหรับคนพิการที่ใช้รถวีลแชร์ ดังแสดงในรูป โดยพื้นเอียงนี้ยาว 2.6 เมตร และมีมุมลาดเอียง 25° จงหาความสูงของพื้นเอียงและพื้นระนาบยาวเท่าไร



วิธีทำ ต้องการหาความสูงของพื้นเอียงให้ใช้

$$\sin \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{BC}{AB}$$

$$BC = AB \sin \theta$$

แทนค่า $BC = (2.6 \text{ m}) \sin(25^\circ)$

$\therefore$ ความสูงของพื้นเอียง = 1.1 m ตอบ

ต้องการหาความยาวของพื้นระนาบให้ใช้

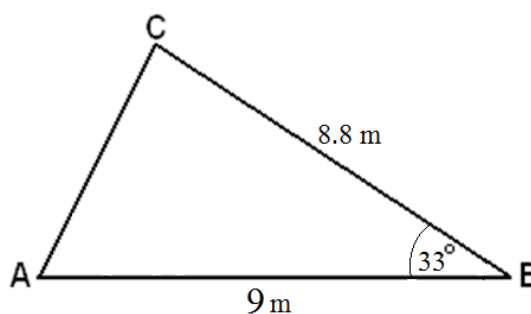
$$\cos \theta = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{AC}{AB}$$

$$AB \cos \theta = AC$$

$$AC = (2.6 \text{ m}) \cos(25^\circ)$$

$$AC = 2.356 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

9. สามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่ง ด้าน AB = 9 เมตร และด้าน BC = 8.8 เมตร มีมุม $\widehat{B} = 33^\circ$ จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC รูปนี้



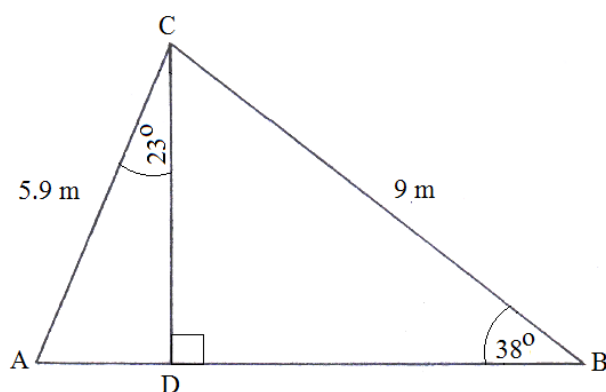
วิธีทำ พื้นที่ $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times AB \times BC \cdot \sin \beta$

แทนค่า พื้นที่ $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 9 \text{ m} \times (8.8 \text{ m}) \sin (33^\circ)$

= 21.57 m

ตอบ

10. สามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่ง ด้าน BC = 9 เมตร และด้าน AC = 5.9 เมตร มีมุม $\hat{C}D = 23^\circ$ และมุม B = 38° จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC รูปนี้



วิธีทำ หาความยาว AD โดยใช้

$$\cos \theta = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{AD}{AC}$$

$$AD = AC \cos \theta$$

แทนค่า

$$AD = (5.9 \text{ m}) \cos(67^\circ)$$

$$AD = 2.305 \text{ m}$$

หาความยาว BD โดยใช้

$$\cos \theta = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{BD}{BC}$$

$$BD = BC \cos \theta$$

แทนค่า

$$BD = (9 \text{ m}) \cos(38^\circ)$$

$$BD = 7.09 \text{ m}$$

$$\therefore \text{ฐานของ } \triangle \text{ ยาว} = 2.305 \text{ m} + 7.09 \text{ m} = 9.4 \text{ m}$$

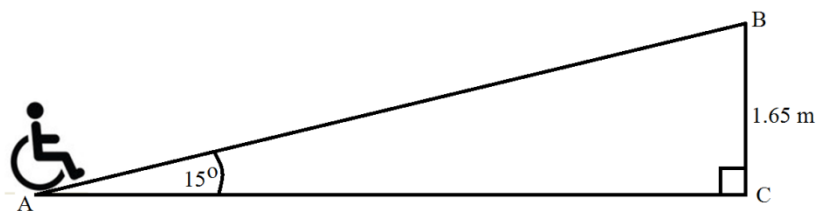
$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times c \times b \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \times 9.4 \times 5.9 \sin(67^\circ) \end{aligned}$$

แทนค่า

$$\text{พื้นที่ } \triangle ABC = 25.53 \text{ cm}$$

ตอบ

11. ต้องการสร้างทางลาดเอียงแห่งหนึ่งสำหรับคนพิการที่ใช้รถวีลแชร์ โดยทางลาดเอียงนี้มีความสูง 1.65 เมตร และมีมุมลาดเอียง 15° ทางลาดเอียงนี้将有ความยาวเท่าไร



วิธีทำ ต้องการหาความยาวของทางลาดเอียงให้ใช้

$$\sin \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{BC}{AB}$$

$$AB = \frac{BC}{\sin \theta}$$

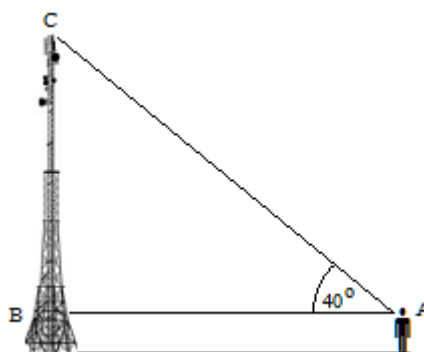
แทนค่า

$$AB = \frac{1.65 \text{ m}}{\sin(15^\circ)}$$

$$\therefore \text{ความยาวของทางลาดเอียง} = 6.375 \text{ m}$$

ตอบ

12. นายเอยืนห่างจากหอ KIRAN เป็นระยะทาง 75 เมตร เขามองไปยังยอดหอโดยทำมุมเงยกับยอดหอเป็นมุม 40° ดังแสดงในรูป จงหาความสูงของหอ ถ้านายเอสูง 1.8 เมตร



วิธีทำ

$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{BC}{AB}$$

แทนค่า

$$\tan(40^\circ) = \frac{BC}{75}$$

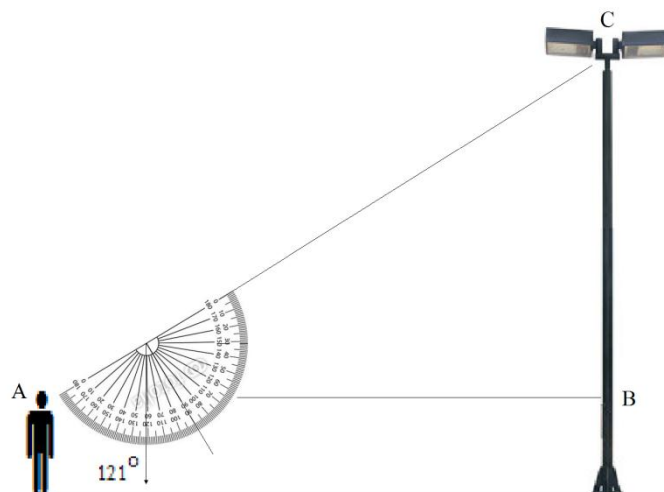
$$BC = 75 \tan(40^\circ)$$

$$BC = 62.93 \text{ m}$$

$$\text{นายเอสูง 1.8 เมตร หอสูง} = 62.93 + 1.8 \approx 64.73 \text{ m}$$

ตอบ

13. นายเอกสูง 170 เซนติเมตร ใช้เครื่องวงกลมย่นเล็งที่ฐานของเครื่องวงกลมไปยังปลายของโคมไฟจนเชือกดิ่งที่เครื่องวงกลมชี้ที่เลข 121° และก้าวเดินไปที่ฐานของโคมไฟได้ 20 ก้าว โคมไฟนี้สูงกี่เมตร (กำหนดให้ 1 ก้าว ≈ 0.75 m)



วิธีทำ เครื่องวงกลมย่นเล็งที่ปลายของโคมไฟจนเชือกดิ่งที่เครื่องวงกลมชี้ที่เลข 121°

$$\therefore \text{มุมเงย} = 121^\circ - 90^\circ = 31^\circ$$

จากจุดวัดมุมเงยเดินไปที่ฐานของโคมไฟได้ 20 ก้าว

$$1 \text{ ก้าว} \approx 0.75 \text{ m}$$

$$\therefore \text{ระยะทางในแนวราบ}(AB) = 20 \times 0.75 \text{ m} = 15 \text{ m}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{แทนค่า} \quad \tan(31^\circ) = \frac{BC}{15 \text{ m}}$$

$$BC = (15 \text{ m}) \tan(31^\circ)$$

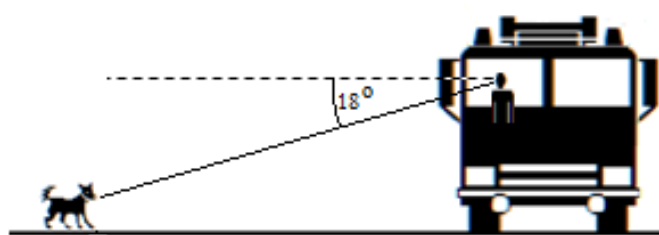
$$BC = 9.01 \text{ m}$$

$$\text{นายเอกเล็งที่ความสูง } 170 \text{ cm} = 1.70 \text{ m}$$

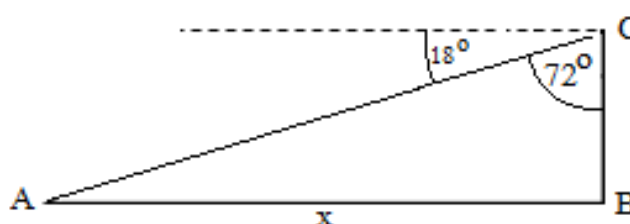
$$\therefore \text{โคมไฟนี้สูง} \approx 9.01 + 1.70 \approx 10.71 \text{ m}$$

ตอบ

14. นายเอขับรถอยู่บนรถบัสสูง 2 เมตร และระวางสุนัขที่อยู่ห่างจากรถบัส โดยเขามองไปที่สุนัขด้วยมุมก้ม 18° จงหาว่าสุนัขอยู่ห่างจากรถบัสเท่าไร



วิธีทำ เขียนแผนภาพใหม่เพื่อให้สามารถคำนวณได้ง่าย



$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{x}{BC}$$

แทนค่า

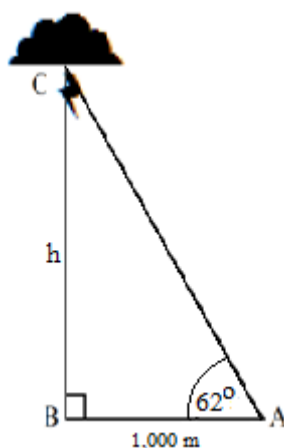
$$\tan(72^\circ) = \frac{x}{2 \text{ m}}$$

$$x = (2 \text{ m}) \tan(72^\circ)$$

$$x \approx 6.16 \text{ m}$$

ตอบ

15. สนามบินแห่งหนึ่งต้องการที่จะทราบระดับความสูงของฐานเมฆระดับชั้นต่ำสุดเมื่อเมฆเริ่มก่อตัว ซึ่งไม่สามารถที่จะวัดระดับความสูงได้โดยตรง จึงได้ฉายแสงจากสปอตไลท์ไปยังฐานเมฆที่ระดับชั้นต่ำสุดเป็นมุมเงย 62° สปอตไลท์อยู่ห่างจากฐานเมฆในแนวราบประมาณ 1,000 m ฐานเมฆจะมีความสูงเท่าไร



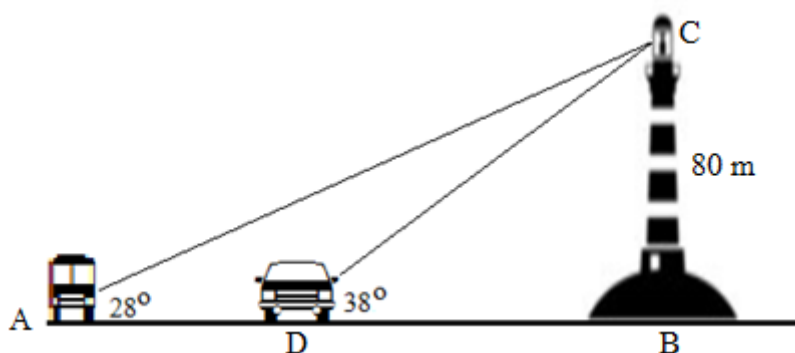
วิธีทำ $\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{h}{AB}$

แทนค่า $\tan(62^\circ) = \frac{h}{1,000 \text{ m}}$

$$h = (1,000 \text{ m}) \tan(62^\circ)$$

$$h \approx 1,8880.73 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

16. เจ้าหน้าที่คนหนึ่งอยู่บนยอดโดมแห่งหนึ่งสูง 80 เมตร มองลงมายังรถยนต์ 2 คันที่อยู่บนแนวเดียวกัน ด้วยมุมก้มเท่ากับ 28° และ 38° รถยนต์ทั้งสองคันห่างกันประมาณกี่เมตร



วิธีทำ รูปสามเหลี่ยม ABC

$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{BC}{AB}$$

แทนค่า $\tan(28^\circ) = \frac{80}{AB}$

$$AB = \frac{80}{\tan(28^\circ)}$$

$$AB = 150.46 \text{ m}$$

รูปสามเหลี่ยม DBC

$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{BC}{DB}$$

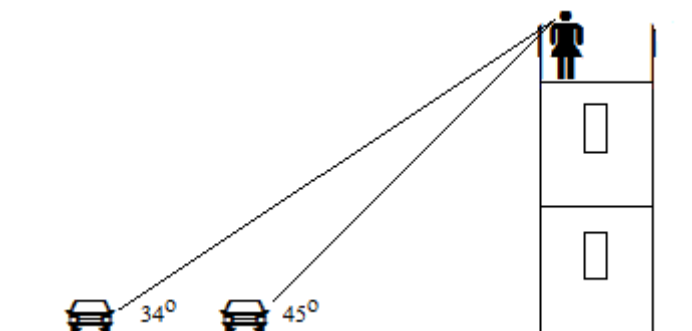
แทนค่า $\tan(38^\circ) = \frac{80}{DB}$

$$DB = \frac{80}{\tan(38^\circ)}$$

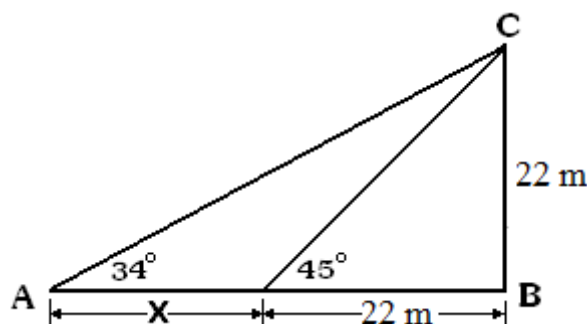
$$DB = 102.4 \text{ m}$$

$$\therefore \text{รถยนต์ทั้งสองคันห่างกัน } 150.46 \text{ m} - 102.4 \text{ m} = 48.06 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

17. หญิงคนหนึ่งยืนอยู่บนดาดฟ้าตึกหลังหนึ่งสูง 22 เมตร และมองเห็นรถยนต์คันแรกเป็นมุมก้ม 45° และมองเห็นรถยนต์คันที่สองเป็นมุมก้ม 34° ตามลำดับ รถยนต์ 2 คันนี้ห่างกันประมาณกี่เมตร



วิธีทำ เขียนแผนภาพรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใหม่และกำหนดมุม เพื่อสะดวกในการคำนวณตึกสูง 22 m และมุมก้ม 45° ดังนั้นระยะห่างของรถยนต์คันแรกกับตึกจึงเท่ากับ ความสูงของตึก คือเท่ากับ 22 m



$\triangle ABC$

$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{BC}{AB}$$

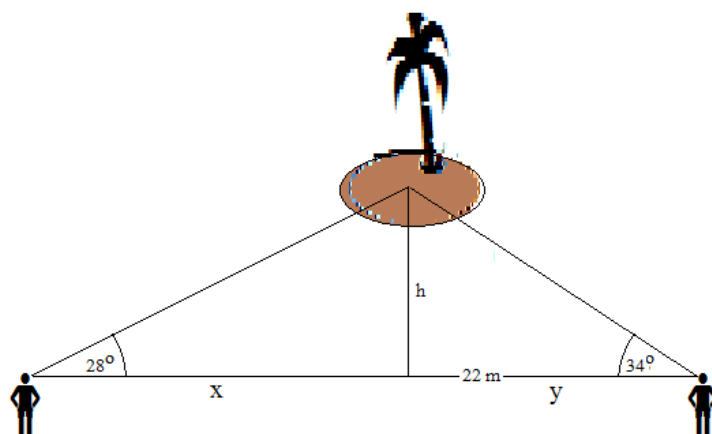
แทนค่า

$$\begin{aligned}\tan(34^\circ) &= \frac{22}{x + 22} \\ x + 22 &= \frac{22}{\tan(34^\circ)} \\ x + 22 &= 32.62 \\ x &= 32.62 - 22\end{aligned}$$

$\therefore$ รถยนต์ 2 คันนี้ห่างกัน ≈ 10.62 m

ตอบ

18. วิสวกรสองคนต้องการหาระยะทางของเกาะแห่งหนึ่งกับชายหาด เขาจึงยืนห่างกัน 22 เมตร และมองไปที่กึ่งกลางเกาะเป็นมุมเงย 28° และ 34° ดังแสดงในรูป จงคำนวณหาระยะทางของเกาะแห่งนี้กับชายหาด



วิธีทำ รูปสามเหลี่ยมซ้ายมือ

$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{h}{x} \quad (1)$$

แทนค่า

$$\tan(28^\circ) = \frac{h}{x}$$

$$h = x \tan(28^\circ)$$

$$h = 0.532x \quad (2)$$

รูปสามเหลี่ยมขวามือ

$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{h}{y} \quad (3)$$

แทนค่า

$$\tan(34^\circ) = \frac{h}{y}$$

$$h = y \tan(34^\circ)$$

$$h = 0.675y \quad (4)$$

$$(2) = (4) \quad 0.532x = 0.675y$$

$$x = \frac{0.675y}{0.532} = 1.268y$$

และ

$$x + y = 22$$

แทนค่า

$$1.268y + y = 22$$

$$y = \frac{22}{2.268} = 9.7 \text{ m}$$

$$\therefore x = 22 - 9.7 = 12.3 \text{ m}$$

จาก (2)

$$h = 0.532x$$

$$h = 0.532(12.3 \text{ m}) = 6.55 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

จาก (4)

$$h = 0.675y$$

$$h = 0.675(9.7 \text{ m}) = 6.55 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 3 ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย

1. จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่แท้จริงของ $\sin 120^\circ$ โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย

วิธีทำ

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = y$$

$$\text{พิกัดของมุมเฉพาะเจาะจงบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ } 120^\circ = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ตอบ}$$

2. จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่แท้จริงของ $\cos 60^\circ$ โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย

วิธีทำ

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = x$$

$$\text{พิกัดของมุมเฉพาะเจาะจงบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ } 60^\circ = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{ตอบ}$$

3. จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่แท้จริงของ $\tan 120^\circ$ โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย

วิธีทำ

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\text{พิกัดของมุมเฉพาะเจาะจงบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ } 120^\circ = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \tan 120^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \quad \text{ตอบ}$$

4. จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่แท้จริงของ $\sec 210^\circ$ โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย

วิธีทำ

$$\sec \theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\text{พิกัดของมุมเฉพาะเจาะจงบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ } 210^\circ = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sec 210^\circ &= \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ \sec 210^\circ &= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

5. จงใช้ตารางหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมเฉพาะเจาะจง ดังนี้

5.1 $\sin 94.7^\circ$

5.2 $\cos 91.4^\circ$

5.3 $\cos 120.3^\circ$

5.4 $\tan 95.8^\circ$

θ	sin	cos	tan
90	1.0000	0.0000	+ -
91	0.9998	-0.0175	-57.2900
92	0.9994	-0.0349	-28.6363
93	0.9986	-0.0523	-19.0811
94	0.9976	-0.0698	-14.3007
95	0.9962	-0.0872	-11.4301
96	0.9945	-0.1045	-9.5144
120	0.8660	-0.5000	-1.7321
121	0.8572	-0.5150	-1.6643

Deg	θ	sin	cos	tan
90	1.0000	0.0000	+ -	
91	0.9998	-0.0175	-57.2900	
92	0.9994	-0.0349	-28.6363	
93	0.9986	-0.0523	-19.0811	
94	0.9976	-0.0698	-14.3007	
95	0.9962	-0.0872	-11.4301	
96	0.9945	-0.1045	-9.5144	
120	0.8660	-0.5000	-1.7321	
121	0.8572	-0.5150	-1.6643	

วิธีทำ 5.1 จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\sin 94^\circ = 0.9976$$

$$\sin 95^\circ = 0.9962$$

มุม 94 และมุม 95 ต่างกัน 1 องศา และค่า sin ของมุมทั้งสองต่างกัน $0.9976 - 0.9962 = 0.0014$

ดังนั้น

$$1 \text{ องศา} = 0.0014$$

$$0.7 \text{ องศา} = \frac{0.0014 \times 0.7}{1} = 0.00098$$

$$\text{ดังนั้น } \sin 94.7^\circ = 0.9976 + 0.00098 = 0.9986$$

ตอบ

5.2 จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\cos 91^\circ = -0.0175$$

$$\cos 92^\circ = -0.0349$$

มุม 92 และมุม 91 ต่างกัน 1 องศา และค่า cos ของมุมทั้งสองต่างกัน $-0.0349 - (-0.0175) = -0.0174$

ดังนั้น

$$1 \text{ องศา} = -0.0174$$

$$0.4 \text{ องศา} = \frac{-0.0174 \times 0.4}{1} = -0.00696$$

$$\text{ดังนั้น } \cos 91.4^\circ = -0.0175 + (-0.00696) = -0.0245$$

ตอบ

5.3 จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\cos 120^\circ = -0.5000$

$$\cos 121^\circ = -0.5150$$

มุม 120 และมุม 121 ต่างกัน 1 องศา และค่า $\cos$ ของมุมทั้งสองต่างกัน $-0.5150 - (-0.5000) = -0.015$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad 1 \text{ องศา} &= -0.015 \\ 0.3 \text{ องศา} &= \frac{-0.015 \times 0.3}{1} = -0.0045 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \cos 120.3^\circ = -0.5000 + (-0.0045) = -0.5045 \quad \text{ตอบ}$$

5.4 จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\tan 95^\circ = -11.4321$

$$\tan 96^\circ = -9.5144$$

มุม 96 และมุม 95 ต่างกัน 1 องศา และค่า $\tan$ ของมุมทั้งสองต่างกัน $-9.5144 - (-11.4321) = 1.9177$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad 1 \text{ องศา} &= 1.9177 \\ 0.8 \text{ องศา} &= \frac{1.9177 \times 0.8}{1} = 1.5342 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \tan 95.8^\circ = -11.4321 + 1.5342 = -9.8979 \quad \text{ตอบ}$$

6. ถ้า $\sin \theta = \frac{3}{4}$ และ $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ให้หาค่าของ $\cos \theta$ และ $\tan \theta$

วิธีทำ ซึ่งมุม θ มีค่ามากกว่า 90° แต่น้อยกว่า 180° แสดงว่าด้านที่ตัดกันบนวงกลมอยู่ในควอดรันต์ที่ 2

สมบัติของพีทาโกรัส $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

แทนค่า $\sin \theta = \frac{3}{4}$ $\cos^2 \theta + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1$

$$\cos^2 \theta + \frac{9}{16} = 1$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{9}{16}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{7}{16}$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{7}{16}}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

มุม θ อยู่ในควอดรันต์ที่ 2

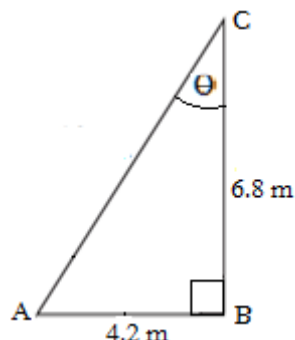
$$\therefore \cos \theta = -\frac{\sqrt{7}}{4} \quad \text{ตอบ}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{4} \left(-\frac{4}{\sqrt{7}}\right)$$

$$\tan \theta = -\frac{3}{\sqrt{7}} \quad \text{ตอบ}$$

7. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีขนาดดังแสดงในรูป จงหาขนาดของมุม θ โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ



วิธีทำ

$$\theta = \arctan \left[\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} \right] = \arctan \left(\frac{AB}{BC} \right)$$

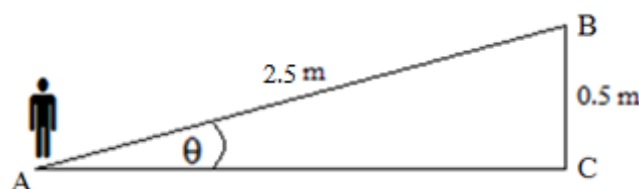
แทนค่า

$$\theta = \arctan \left(\frac{4.2 \text{ m}}{6.8 \text{ m}} \right)$$

$$\theta = 31.70^\circ$$

ตอบ

8. ช่างก่อสร้างนำไม้กระดานยาว 2.5 เมตรมาวางพาดขอบบันไดสูง 0.5 เมตร เพื่อเดินขึ้นดื่งที่กำลังก่อสร้าง
จงหามุมที่ไม้กระดานพาดบันไดกับพื้นราบ ดังแสดงในรูป



วิธีทำ

$$\sin \theta = \left[\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}\theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \right] = \left(\frac{a}{b} \right)$$

แทนค่า

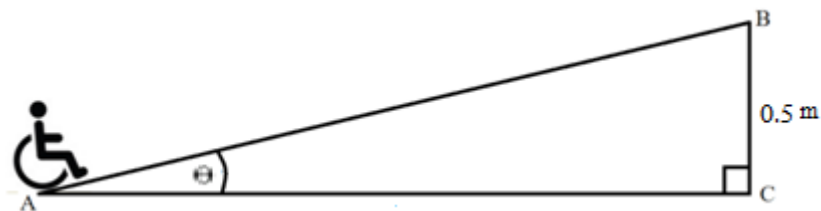
$$\sin \theta = \left(\frac{0.5 \text{ m}}{2.5 \text{ m}} \right)$$

$$\sin \theta = 0.2$$

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติตรงค่า $\sin \theta = 0.2$ ตรงกับมุม 12°

ตอบ

9. ต้องการสร้างทางลาดแห่งหนึ่งสำหรับคนพิการที่ใช้รถวีลแชร์ให้ได้มาตรฐานอัตราส่วนทางลาด 1 : 12 โดยทางลาดนี้มีความสูง 0.5 m จงหาความยาวทางลาดนี้



วิธีทำ มาตรฐานอัตราส่วนทางลาดสูง : ยาว = 1 : 12 และทางลาดสูง 0.5 m

$$\therefore \quad 1 \times 0.5 : 12 \times 0.5$$

$$0.5 : 6$$

$$\therefore \quad \text{ความยาว} = 6 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

ต้องการหาความยาวของทางลาดให้ใช้จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

แทนค่า $(AB)^2 = (9.6)^2 + (0.8)^2$

$$(AB)^2 = 92.16 + 0.64$$

$$(AB)^2 = 92.8$$

$$AB = \sqrt{92.8}$$

$$\therefore \quad \text{ทางลาดยาว} \quad AB = 9.63 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

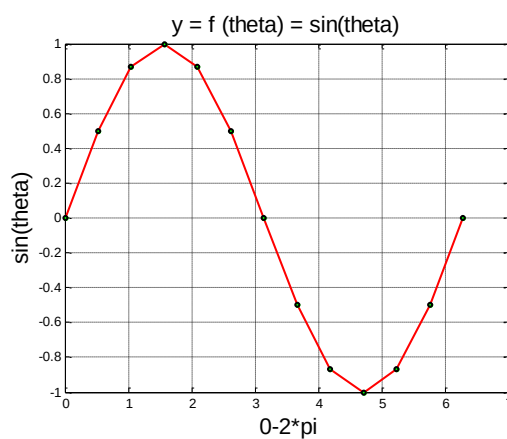
10. จงเขียนกราฟ $y = \sin \theta$ ด้วยมุม เมื่อ $0 < \theta < 2\pi$

ด้วยมุม $\theta = [0 \ 30 \ 60 \ 90 \ 120 \ 150 \ 180 \ 210 \ 240 \ 270 \ 300 \ 330 \ 360]$

วิธีทำ กำหนดค่า θ และหาค่า y บางจุดที่กราฟผ่านจาก $y = \sin \theta$

θ	$y = \sin \theta$	θ	$y = \sin \theta$
0°	0	180°	0
30°	0.5	210°	-0.5
60°	0.87	240°	-0.87
90°	1	270°	-1
120°	0.87	300°	-0.87
150°	0.5	330°	-0.5
		360°	0

นำคู่อันดับ θ, y มาเขียนกราฟได้ดังนี้



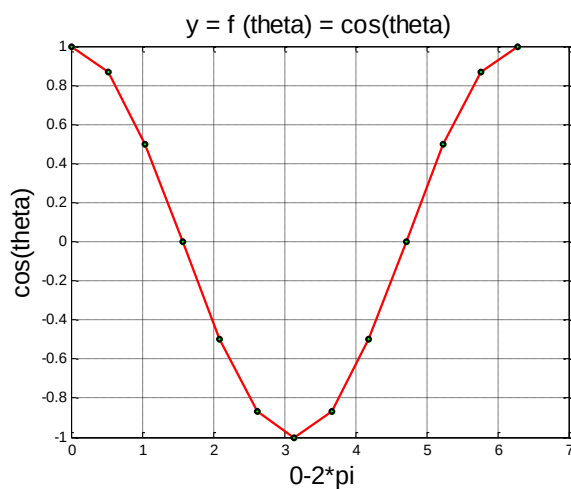
11. จงเขียนกราฟ $y = \cos \theta$ เมื่อ $0 < \theta < 2\pi$

ด้วยมุม $\theta = [0 \ 30 \ 60 \ 90 \ 120 \ 150 \ 180 \ 210 \ 240 \ 270 \ 300 \ 330 \ 360]$

วิธีทำ กำหนดค่า θ และหาค่า y บางจุดที่กราฟผ่านจาก $y = \cos \theta$

θ	$y = \cos \theta$	θ	$y = \cos \theta$
0°	1	180°	-1
30°	0.87	210°	-0.87
60°	0.5	240°	-0.5
90°	0	270°	0
120°	-0.5	300°	0.5
150°	-0.87	330°	0.87
		360°	1

นำคู่อันดับ θ, y มาเขียนกราฟได้ดังนี้



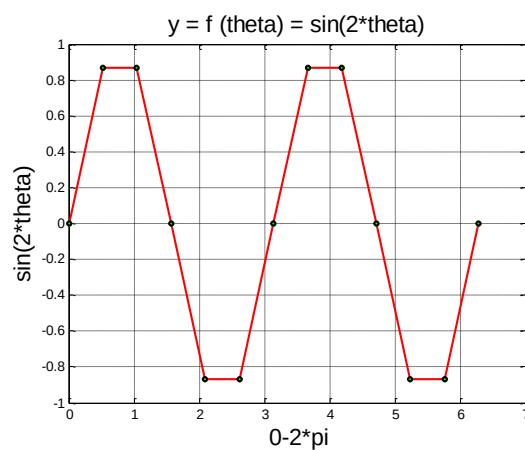
12. จงเขียนกราฟ $y = \sin 2\theta$ เมื่อ $0 < \theta < 2\pi$

ด้วยมุม $\theta = [0 \ 30 \ 60 \ 90 \ 120 \ 150 \ 180 \ 210 \ 240 \ 270 \ 300 \ 330 \ 360]$

วิธีทำ กำหนดค่า θ และหาค่า y บางจุดที่กราฟผ่านจาก $y = \sin 2\theta$

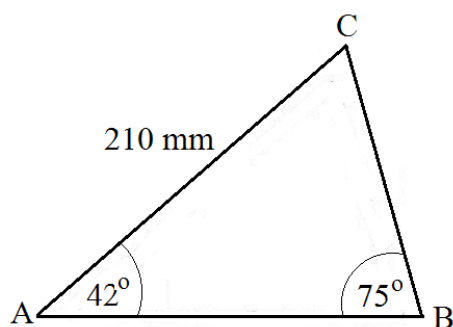
θ	$y = \sin 2\theta$	θ	$y = \sin 2\theta$
0°	0	180°	0
30°	0.87	210°	0.87
60°	0.87	240°	0.87
90°	0	270°	0
120°	-0.87	300°	-0.87
150°	-0.87	330°	-0.87
		360°	0

นำคู่อันดับ θ, y มาเขียนกราฟได้ดังนี้



เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 4 กฎของไซน์และโคไซน์

1. สามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่ง มีขนาดดังรูป จงคำนวณหาความยาวด้าน BC โดยใช้กฎของไซน์



วิธีทำ ใช้กฎของไซน์ด้าน a และด้าน b

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

แทนค่า

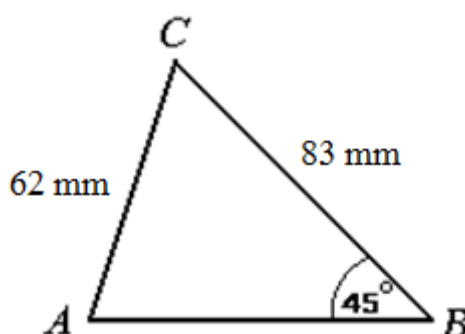
$$\frac{BC}{\sin(42^\circ)} = \frac{210 \text{ mm}}{\sin(75^\circ)}$$

$$BC = \frac{210 \text{ mm}(\sin(42^\circ))}{\sin(75^\circ)}$$

$$BC = 145.47 \text{ mm}$$

ตอบ

2. สามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่ง มีขนาดดังรูป จงคำนวณหาความยาวด้าน AB โดยใช้กฎของไซน์



วิธีทำ ใช้กฎของไซน์ด้าน a และด้าน b

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

แทนค่า

$$\frac{83 \text{ mm}}{\sin A} = \frac{62 \text{ mm}}{\sin(45^\circ)}$$

$$\sin A = \frac{83 \text{ mm}(\sin(45^\circ))}{62 \text{ mm}}$$

$$\sin A = 0.947$$

$$A = \sin^{-1}(0.947)$$

$$\angle A = 71.26^\circ$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 71.26^\circ - 45^\circ = 63.74^\circ$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

แทนค่า

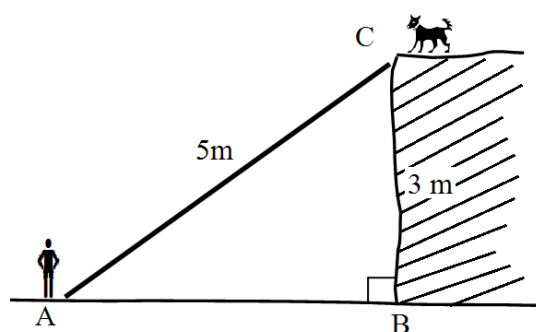
$$\frac{62 \text{ mm}}{\sin(45^\circ)} = \frac{c}{\sin(63.74^\circ)}$$

$$AB = \frac{(62 \text{ mm})\sin(63.74^\circ)}{\sin(45^\circ)}$$

$$AB = 78.63 \text{ mm}$$

ตอบ

3. ชายคนหนึ่งต้องการช่วยสุนัขที่ติดอยู่บนหน้าผาชันสูงประมาณ 3 m เขาจึงใช้บันไดยาว 5 m พาดบนหน้าผา เขาจะต้องพาดบันไดให้ฐานบันไดกว้างเท่าไร หับบันไดจึงจะพาดบนหน้าผาพอดี



วิธีทำ ใช้กฎของไซน์กับ $\triangle ACB$ ด้าน AC และด้าน BC

แทนค่า

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \beta}$$

$$\frac{3 \text{ m}}{\sin \alpha} = \frac{5 \text{ m}}{\sin(90^\circ)}$$

$$\sin \alpha = \frac{3 \text{ m}(\sin(90^\circ))}{5 \text{ m}}$$

$$\sin \alpha = 0.6$$

$$\alpha = \sin^{-1}(0.6)$$

$$\therefore \angle A = 36.87^\circ$$

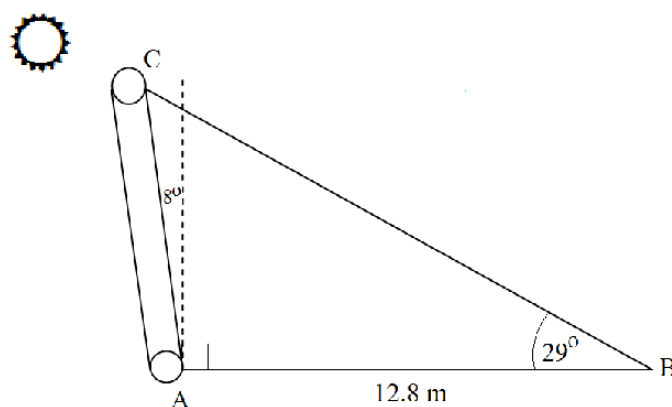
$$\therefore \angle C = 90^\circ - 36.87^\circ = 53.13^\circ$$

ใช้กฎของไซน์กับ $\triangle ACB$ ด้าน AC และด้าน AB

$$\begin{aligned} \frac{AC}{\sin \beta} &= \frac{AB}{\sin C} \\ \frac{5 \text{ m}}{\sin(90^\circ)} &= \frac{AB}{\sin(53.13^\circ)} \\ AB &= \frac{5 \text{ m}(\sin 53.13^\circ)}{\sin(90^\circ)} \end{aligned}$$

ฐานบันไดกว้าง $\approx 4 \text{ m}$ ตอบ

4. เสาต้นหนึ่งปักอยู่บนดินเอียงจากแนวดิ่งประมาณ 8° และมีแสงแดดจากดวงอาทิตย์ส่องไปยังเสาจนเกิดเงาทำมุม 29° และยาว 12.8 เมตร จงหาว่าเสาต้นนี้ยาวเท่าไร



วิธีทำ

$$\angle A = 90^\circ + 8^\circ = 98^\circ$$

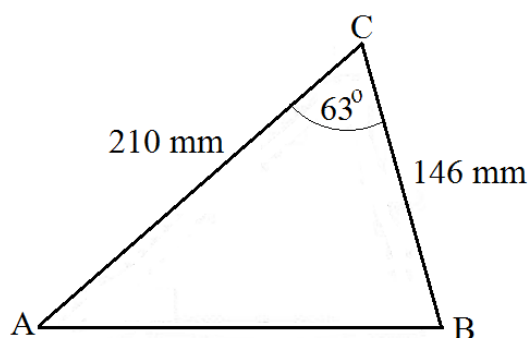
$$\therefore \angle C = 180^\circ - (98^\circ + 29^\circ) = 53^\circ$$

ใช้กฎของไซน์ด้าน b และด้าน c

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sin \beta} &= \frac{c}{\sin \gamma} \\ \frac{b}{\sin(29^\circ)} &= \frac{12.8 \text{ m}}{\sin(53^\circ)} \\ b &= \frac{(12.8 \text{ m})\sin(29^\circ)}{\sin(53^\circ)} \end{aligned}$$

เสาต้นนี้ยาว $\approx 7.77 \text{ m}$ ตอบ

5. สามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่ง มีขนาดดังรูป จงคำนวณหาความยาวด้าน AB โดยใช้กฎของโคไซน์



วิธีทำ จากกฎของโคไซน์หาความยาวด้าน AB

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)}$$

แทนค่า

$$c = \sqrt{146^2 + 210^2 - 2(146)(210)\cos(63^\circ)}$$

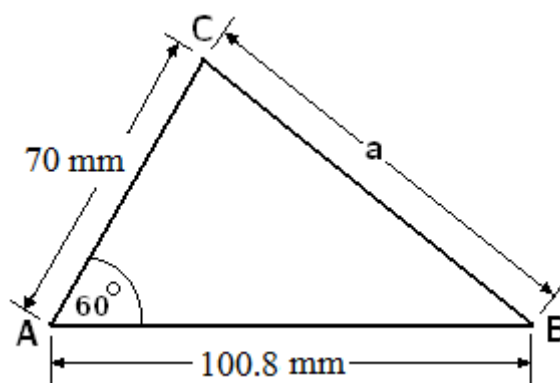
$$c = \sqrt{65,416 - 27,838.7}$$

$$c = \sqrt{37,307.3}$$

$$c = 193.15 \text{ mm}$$

ตอบ

6. สามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่ง มีขนาดดังรูป จงคำนวณหาความยาวด้าน BC โดยใช้กฎของโคไซน์



วิธีทำ จากกฎของโคไซน์หาความยาวด้าน AB

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

แทนค่า

$$a = \sqrt{70^2 + 100.8^2 - 2(70)(100.8)\cos(60^\circ)}$$

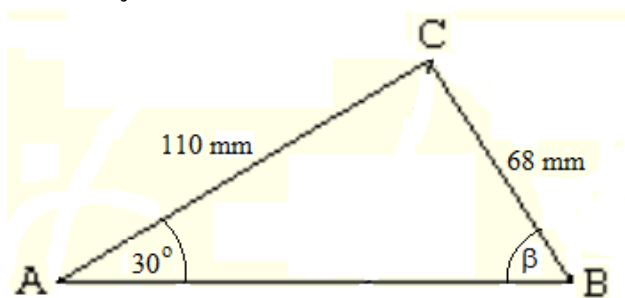
$$a = \sqrt{15,060.64 - 7,056}$$

$$a = \sqrt{8,004.64}$$

$$a = 89.47 \text{ mm}$$

ตอบ

7. สามเหลี่ยม ABC มีขนาดดังรูป ด้าน BC = 68 มิลลิเมตร ด้าน AC = 110 มิลลิเมตร มีมุม $\widehat{CAB} = 30^\circ$ จงหาความยาวของฐานสามเหลี่ยม ABC รูปนี้



วิธีทำ ใช้กฎของไซน์ด้าน a และด้าน b เพื่อหามุม ABC

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{b}{\sin \beta} \\ \text{หรือ} \quad \frac{\sin \alpha}{a} &= \frac{\sin \beta}{b} \\ \text{แทนค่า} \quad \frac{\sin(30^\circ)}{68 \text{ mm}} &= \frac{\sin \beta}{110 \text{ mm}} \\ \sin \beta &= \frac{110 \text{ mm}(\sin(30^\circ))}{68 \text{ mm}} \\ \beta &= \sin^{-1}(0.81) \\ \beta &= 54^\circ \end{aligned}$$

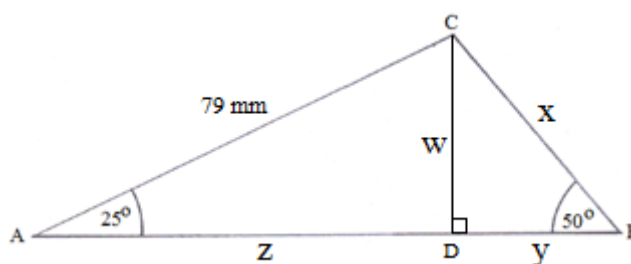
$$\text{มุม } ACB = 180^\circ - 54^\circ - 30^\circ = 96^\circ$$

จากกฎของโคไซน์หาความยาวฐานสามเหลี่ยมคือด้าน AB

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \\ c &= \sqrt{68^2 + 110^2 - 2(68)(110)\cos(96^\circ)} \\ AB &= \sqrt{16,724 - (-1,563.75)} \\ AB &= \sqrt{18,287.75} \\ AB &= 135.23 \text{ mm} \end{aligned}$$

ตอบ

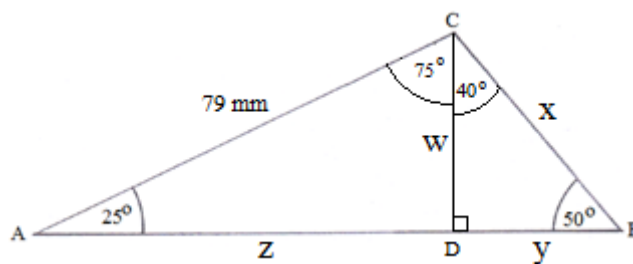
8. สามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่ง มีมุม $\widehat{A} = 25^\circ$ มุม $\widehat{B} = 50^\circ$ และด้าน AC ยาว 79 มิลลิเมตร จงหาความยาวของด้าน w, x, y และ z



วิธีทำ

$$\text{จากรูป มุม } ACD = 180^\circ - 25^\circ - 90^\circ = 75^\circ$$

$$\text{จากรูป มุม } BCD = 180^\circ - 50^\circ - 90^\circ = 40^\circ$$

ใช้กฎของไซน์กับ $\triangle ACD$ ด้าน AC และด้าน w

$$\begin{aligned} \frac{AC}{\sin(90^\circ)} &= \frac{w}{\sin(25^\circ)} \\ \frac{75 \text{ mm}}{\sin(90^\circ)} &= \frac{w}{\sin(25^\circ)} \\ w &= \frac{75 \text{ mm}(\sin(25^\circ))}{\sin(90^\circ)} \\ w &= 31.7 \text{ mm} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

ด้าน AC และด้าน z

$$\begin{aligned} \frac{AC}{\sin(90^\circ)} &= \frac{z}{\sin(75^\circ)} \\ \frac{75 \text{ mm}}{\sin(90^\circ)} &= \frac{z}{\sin(75^\circ)} \\ z &= \frac{75 \text{ mm}(\sin(75^\circ))}{\sin(90^\circ)} \\ z &= 72.44 \text{ mm} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

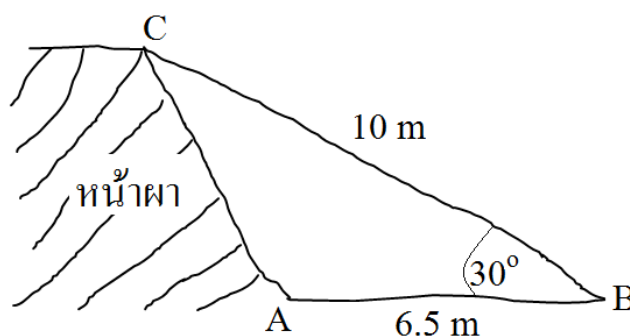
แทนค่า

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sin(90^\circ)} &= \frac{w}{\sin(50^\circ)} \\ \frac{x}{\sin(90^\circ)} &= \frac{31.7 \text{ mm}}{\sin(50^\circ)} \\ x &= \frac{31.7 \text{ mm}(\sin(90^\circ))}{\sin(50^\circ)} \\ x &= 41.38 \text{ mm} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

ด้าน x และด้าน y

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sin(90^\circ)} &= \frac{y}{\sin(40^\circ)} \\ \frac{41.38 \text{ mm}}{\sin(90^\circ)} &= \frac{y}{\sin(40^\circ)} \\ y &= \frac{41.38 \text{ mm}(\sin(40^\circ))}{\sin(90^\circ)} \\ y &= 26.6 \text{ mm} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

9. ในการข้ามหน้าผาหนึ่ง ได้สร้างสะพานข้ามมีความยาวประมาณ 10 เมตรและความยาวทางราบประมาณ 6.5 เมตร สะพานวางเอียงประมาณ 30° กับพื้นราบ หน้าผานี้จะมีความยาวประมาณเท่าไร



วิธีทำ จากรูปใช้กฎของโคไซน์เพื่อหาความยาวของหน้าผา

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta}$$

แทนค่า

$$AC = \sqrt{10^2 + 6.5^2 - 2(10)(6.5)\cos(30^\circ)}$$

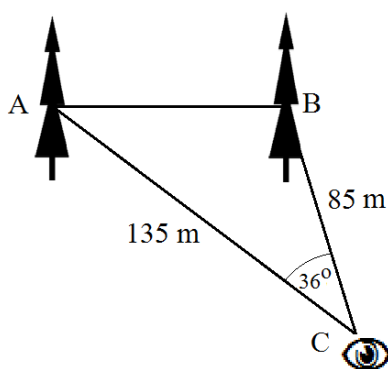
$$AC = \sqrt{142.25 - 112.58}$$

$$AC = \sqrt{29.67}$$

$\therefore$ หน้าผานี้นยาว $AC \approx 5.45$ m

ตอบ

10. ช่างสำรวจสองกล้องสำรวจที่ต้นไม้ต้นแรกมีระยะทาง 85 เมตร และส่งกล้องสำรวจไปที่ต้นไม้ต้นที่สองด้วยมุม 36° มีระยะทาง 135 เมตร จงหาว่าต้นไม้ทั้งสองห่างกันมีระยะทางเท่าไร



วิธีทำ จากรูปใช้กฎของโคไซน์เพื่อหาว่าต้นไม้ทั้งสองห่างกันมีระยะทางเท่าไร

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

แทนค่า

$$c = \sqrt{85^2 + 135^2 - 2(85)(135)\cos(36^\circ)}$$

$$c = \sqrt{25,450 - 18,566.94}$$

$$c = \sqrt{6,883.06}$$

$\therefore$ ต้นไม้ทั้งสองห่างกัน $AB \approx 82.96 \text{ m}$ **ตอบ**

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 5 จำนวนเชิงซ้อน

จงแสดงวิธีการคำนวณ

1. จงบวกและลบจำนวนเชิงซ้อนของ z_1, z_2

$$z_1 = 5 + i6$$

$$z_2 = 6 - i5$$

วิธีทำ

$$z_1 + z_2 = (5 + i6) + (6 - i5)$$

$$= (5 + 6) + i(6 - 5)$$

$$= 11 + i \quad \text{ตอบ}$$

$$z_1 - z_2 = (5 + i6) - (6 - i5)$$

$$= (5 - 6) + i(6 + 5)$$

$$= -1 + i11 \quad \text{ตอบ}$$

2. จงบวกและลบจำนวนเชิงซ้อนของ z_1, z_2

$$z_1 = -7 - i2$$

$$z_2 = 4 + i5$$

วิธีทำ

$$z_1 + z_2 = (-7 - i2) + (4 + i5)$$

$$= (-7 + 4) + i(-2 + 5)$$

$$= -3 + i3 \quad \text{ตอบ}$$

$$z_1 - z_2 = (-7 - i2) - (4 + i5)$$

$$= (-7 - 4) + i(-2 - 5)$$

$$= -11 - i7 \quad \text{ตอบ}$$

3. จงบวกและลบจำนวนเชิงซ้อนของ z_1, z_2

$$z_1 = 7$$

$$z_2 = 5 + i2$$

วิธีทำ

$$z_1 + z_2 = (7) + (5 + i2)$$

$$= (7 + 5) + i2$$

$$= 12 + i2$$

ตอบ

$$z_1 - z_2 = (7) - (5 + i2)$$

$$= (7 - 5) - i2$$

$$= 2 - i2$$

ตอบ

4. จงบวกและลบจำนวนเชิงซ้อนของ z_1, z_2

$$z_1 = 7 + i12$$

$$z_2 = -5$$

วิธีทำ

$$z_1 + z_2 = (7 + i12) + (-5)$$

$$= (7 - 5) + i12$$

$$= 2 + i12$$

ตอบ

$$z_1 - z_2 = (7 + i12) - (-5)$$

$$= (7 + 5) + i12$$

$$= 12 + i12$$

ตอบ

5. จงคูณจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้สูตรของ z_1, z_2

$$z_1 = 5 + i3$$

$$z_2 = 4 - i4$$

วิธีทำ

$$(a \pm ib)(c \pm id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (5 + i3)(4 - i4) &= [(5)(4) - (3)(-4)] + i[(3)(4) + (5)(-4)] \\ &= (20 + 12) + i(12 - 20) \\ &= 32 - i8 \end{aligned}$$

ตอบ

6. จงคูณจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้สูตรของ z_1, z_2

$$z_1 = 3 + i3$$

$$z_2 = 5 - i4$$

วิธีทำ

$$(a \pm ib)(c \pm id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (3 + i3)(5 - i4) &= [(3)(5) - (3)(-4)] + i[(3)(5) + (3)(-4)] \\ &= (15 + 12) + i(15 - 12) \\ &= 27 + i3 \end{aligned}$$

ตอบ

7. จงคูณจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้สูตรของ z_1, z_2

$$z_1 = 5 + i7$$

$$z_2 = 2 + i4$$

วิธีทำ

จากสมการที่ (6.3) $(a \pm ib)(c \pm id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (5 + i7)(2 + i4) &= [(5)(2) - (7)(4)] + i[(7)(2) + (5)(4)] \\ &= (10 - 28) + i(14 + 20) \\ &= -18 + i34 \end{aligned}$$

ตอบ

8. จงคูณจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้สูตรของ z_1, z_2

$$z_1 = 6 - i8$$

$$z_2 = 4 + i2$$

วิธีทำ $(a \pm ib)(c \pm id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (6 - i8)(4 + i2) &= [(6)(4) - (-8)(2)] + i[(-8)(4) + (6)(2)] \\ &= (24 + 16) + i(-32 + 12) \\ &= 40 - i20 \end{aligned}$$

ตอบ

9. จงคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยวิธีกระจายของ z_1, z_2

$$z_1 = 6 + i8$$

$$z_2 = 7 + i2$$

วิธีทำ $z_1 z_2 = (6 + i8)(7 + i2)$

$$\begin{aligned} &= (6)(7) + (6)(i2) + (i8)(7) + (i8)(i2) \\ &= 42 + i12 + i56 + i^2 16 \\ &= 42 + i68 + (-1)16 \\ &= 42 + i68 - 16 \\ &= 26 + i68 \end{aligned}$$

ตอบ

10. จงคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยวิธีกระจายของ z_1, z_2

$$z_1 = 1 - i4$$

$$z_2 = 3 + i5$$

วิธีทำ $z_1 z_2 = (1 - i4)(3 + i5)$

$$\begin{aligned} &= (1)(3) + (1)(i5) + (-i4)(3) + (-i4)(i5) \\ &= 3 + i5 - i12 - i^2 20 \\ &= 3 - i7 - (-1)20 \\ &= 3 - i7 + 20 \\ &= 23 - i7 \end{aligned}$$

ตอบ

11. จงคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยวิธีกระจายของ z_1, z_2

$$z_1 = -4 - i6$$

$$z_2 = 2 - i$$

วิธีทำ $z_1 z_2 = (-4 - i6)(2 - i) = (-4)(2) + (-4)(-i) + (-i6)(2) + (-i6)(-i)$

$$= -8 + i4 - i12 + i^2 6$$

$$= -8 - i8 + (-1)6$$

$$= -14 - i8$$

ตอบ

12. จงหารจำนวนเชิงซ้อนด้วยสังยุคของ z_1, z_2

$$z_1 = 5 + i3$$

$$z_2 = 4 - i4$$

วิธีทำ

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+ib)}{(c+id)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \left[\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(5+i3)}{(4-i4)} = \frac{(5 \times 4) + (3 \times -4)}{4^2 + (-4)^2} + i \left[\frac{(3 \times 4) - (5 \times -4)}{4^2 + (-4)^2} \right]$$

$$= \frac{20-12}{16+16} + i \left[\frac{12+20}{16+16} \right]$$

$$= \frac{8}{32} + i \left[\frac{32}{32} \right]$$

$$= 0.25 + i$$

ตอบ

13. จงหารจำนวนเชิงซ้อนด้วยสัญกของ z_1, z_2

$$z_1 = 3 + i3$$

$$z_2 = 5 - i4$$

วิธีทำ

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+ib)}{(c+id)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \left[\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 + i3)}{(5 - i4)} = \frac{(3 \times 5) + (3 \times -4)}{5^2 + (-4)^2} + i \left[\frac{(3 \times 5) - (3 \times -4)}{5^2 + (-4)^2} \right]$$

$$= \frac{15-12}{25+16} + i \left[\frac{15+12}{25+16} \right]$$

$$= \frac{3}{41} + i \left[\frac{27}{41} \right]$$

$$= 0.073 + i0.66$$

ตอบ

14. จงหารจำนวนเชิงซ้อนด้วยสัญกของ z_1, z_2

$$z_1 = 5 + i7$$

$$z_2 = 2 + i4$$

วิธีทำ

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+ib)}{(c+id)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \left[\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(5 + i7)}{(2 + i4)} = \frac{(5 \times 2) + (7 \times 4)}{2^2 + 4^2} + i \left[\frac{(7 \times 2) - (5 \times 4)}{2^2 + 4^2} \right]$$

$$= \frac{10+28}{4+16} + i \left[\frac{14-20}{4+16} \right]$$

$$= \frac{38}{20} + i \left[\frac{-6}{20} \right]$$

$$= 1.9 - i0.3$$

ตอบ

15. จงหารจำนวนเชิงซ้อนด้วยวิธีเศษส่วนของ z_1, z_2

$$z_1 = 6 + i8$$

$$z_2 = 7 + i2$$

วิธีทำ

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac - iad + ibc - i^2 bd}{c^2 + d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(6+i8)}{(7+i2)} = \frac{(6 \times 7) - i(6 \times 2) + i(8 \times 7) - i^2(8 \times 2)}{7^2 + 2^2}$$

$$= \frac{42 - i12 + i56 - (-1)16}{49 + 4}$$

$$= \frac{42 - i12 + i56 + 16}{53}$$

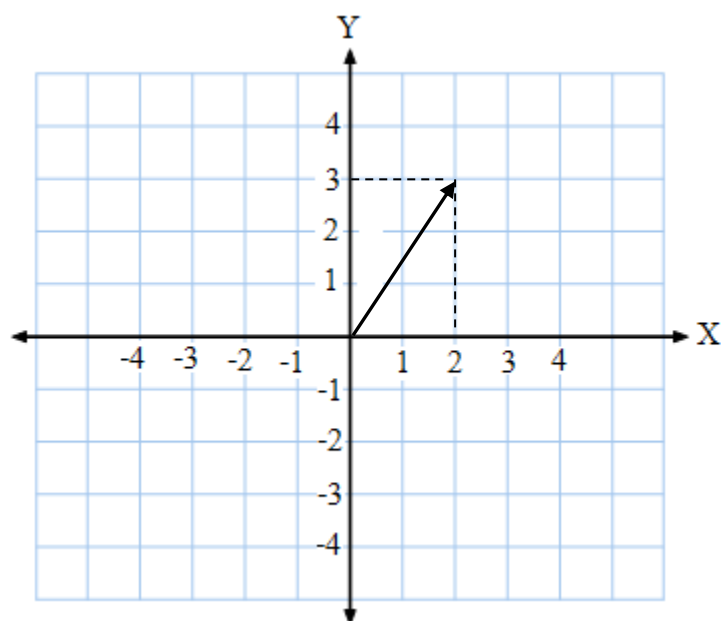
$$= \frac{58}{53} + i \left[\frac{44}{53} \right]$$

$$= 1.09 - i0.83$$

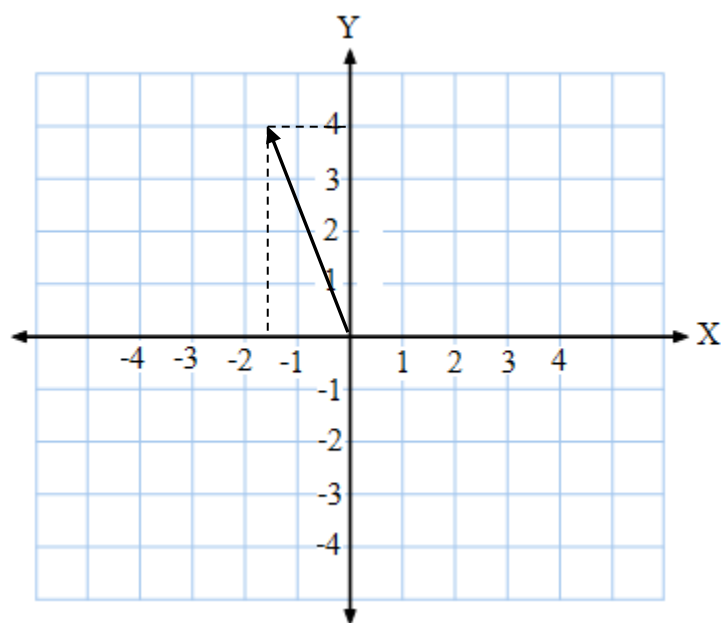
ตอบ

16. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนในข้อต่อไปนี้เป็นเวกเตอร์บนระนาบเชิงซ้อนเดียวกัน

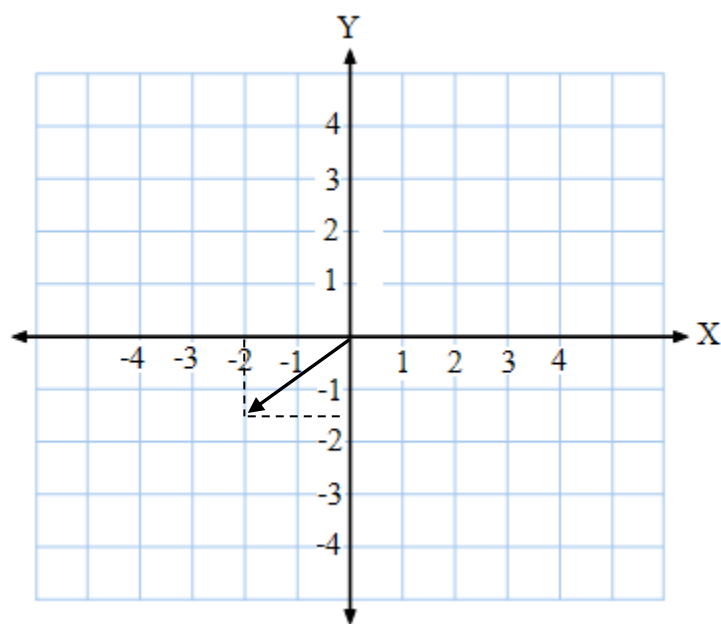
1. $z_1 = 2 + i3$



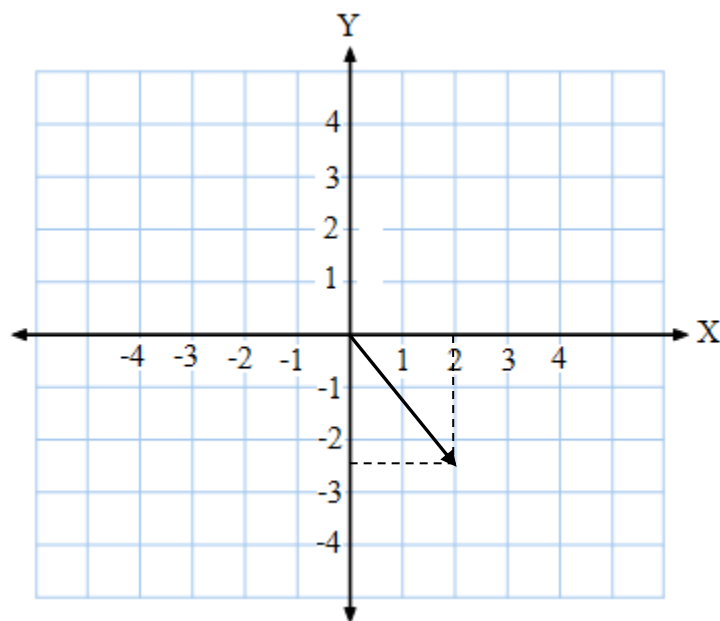
2. $z_2 = -1.5 + i4$



3. $z_3 = -2 - i1.5$



4. $z_4 = 2 - i2.5$



17. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = -4 - i6$ ในรูปเชิงขั้วและมุมเป็นเรเดียน

วิธีทำ รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $z = -4 - i6$

หาค่า r จากสมการที่ (5.9)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

แทนค่า

$$r = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2}$$

$$r = \sqrt{16 + 36}$$

$$r = \sqrt{52}$$

หาค่า θ จากสมการที่ (5.11)

$$\tan \theta = \left(\frac{y}{x} \right)$$

แทนค่า

$$\tan \theta = \left(\frac{36}{16} \right)$$

$$\tan \theta = 1.153$$

แต่ $-4 - i6$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตรงช่อง $\tan$ จะเห็นว่า $\theta = 1.153 = 229^\circ$

$$\therefore \text{ดังนั้น } \theta = 229^\circ \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

$$\theta = 3.995 \quad (\text{เป็นมุมเรเดียน})$$

จากสมการที่ (5.7) จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว คือ

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\text{แทนค่า} \quad z = \sqrt{52} (\cos (3.995) + i \sin (3.995)) \quad \text{ตอบ}$$

18. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = 2 - i$ ในรูปเชิงขั้วและมุมเป็นเรเดียน

วิธีทำ รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $z = 2 - i$

หาค่า r จากสมการที่ (5.9)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{แทนค่า} \quad r = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2}$$

$$r = \sqrt{4 + 1}$$

$$r = \sqrt{5}$$

หาค่า θ จากสมการที่ (5.11)

$$\tan \theta = \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\text{แทนค่า} \quad \tan \theta = \left(\frac{-1}{2} \right)$$

$$\tan \theta = -0.5$$

แต่ $2 - i$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตรงช่อง $\tan$ จะเห็นว่า $\theta = -0.5 \approx 333^\circ$

$$\therefore \text{ดังนั้น } \theta = 333^\circ \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

$$\theta = 5.81 \quad (\text{เป็นมุมเรเดียน})$$

จากสมการที่ (5.7) จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว คือ

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

แทนค่า

$$z = \sqrt{5} (\cos (5.81) + i \sin (5.81))$$

ตอบ

19. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = 6 + i8$ ในรูปเชิงขั้ว และมุมเป็นเรเดียน

วิธีทำ รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $z = 6 + i8$

หาค่า r จากสมการที่ (5.9)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

แทนค่า

$$r = \sqrt{(6)^2 + (8)^2}$$

$$r = \sqrt{36 + 64}$$

$$r = \sqrt{100}$$

หาค่า θ จากสมการที่ (5.11)

$$\tan \theta = \left(\frac{y}{x} \right)$$

แทนค่า

$$\tan \theta = \left(\frac{8}{6} \right)$$

$$\tan \theta = 1.33$$

แต่ $6 + i8$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 1

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตรงช่อง $\tan$ จะเห็นว่า $\theta = 1.33 \approx 53^\circ$

$$\therefore \text{ ดังนั้น } \theta = 53^\circ \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

$$\theta = 0.925 \quad (\text{เป็นมุมเรเดียน})$$

จากสมการที่ (5.7) จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว คือ

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

แทนค่า $z = \sqrt{100} (\cos (0.925) + i \sin (0.925))$ **ตอบ**

20. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = 7 + i2$ ในรูปเชิงขั้ว และมุมเป็นเรเดียน

วิธีทำ รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $z = 7 + i2$

หาค่า r จากสมการที่ (5.9)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

แทนค่า

$$r = \sqrt{(7)^2 + (2)^2}$$

$$r = \sqrt{49 + 4}$$

$$r = \sqrt{53}$$

หาค่า θ จากสมการที่ (5.11)

$$\tan \theta = \left(\frac{y}{x} \right)$$

แทนค่า

$$\tan \theta = \left(\frac{2}{7} \right)$$

$$\tan \theta = 0.286$$

แต่ $7 + i2$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 1

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตรงช่อง $\tan$ จะเห็นว่า $\theta = 0.286 \approx 16^\circ$

$$\therefore \text{ ดังนั้น } \theta = 16^\circ \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

$$\theta = 0.279 \quad (\text{เป็นมุมเรเดียน})$$

จากสมการที่ (5.7) จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วคือ

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

แทนค่า $z = \sqrt{53} (\cos (0.279) + i \sin (0.279))$ **ตอบ**

21. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = -6 - i5$ ในรูปเชิงขั้ว และมุมเป็นเรเดียน

วิธีทำ รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $z = -6 - i5$

หาค่า r จากสมการที่ (5.9)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

แทนค่า

$$r = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2}$$

$$r = \sqrt{36 + 25}$$

$$r = \sqrt{61}$$

หาค่า θ จากสมการที่ (5.11)

$$\tan \theta = \left(\frac{y}{x} \right)$$

แทนค่า

$$\tan \theta = \left(\frac{-5}{-6} \right)$$

$$\tan \theta = 0.833$$

แต่ $-6 - i5$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตรงช่อง $\tan$ จะเห็นว่า $\theta = 0.833 \approx 220^\circ$

$$\therefore \text{ดังนั้น } \theta = 220^\circ \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

$$\theta = 3.84 \quad (\text{เป็นมุมเรเดียน})$$

จากสมการที่ (5.7) จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว คือ

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

แทนค่า

$$z = \sqrt{61} (\cos (3.84) + i\sin (3.84)) \quad \text{ตอบ}$$

22. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = 8 - i2$ ในรูปเชิงขั้ว และมุมเป็นองศา

วิธีทำ รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $z = 8 - i2$

หาค่า r จากสมการที่ (5.9)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

แทนค่า

$$r = \sqrt{(8)^2 + (-2)^2}$$

$$r = \sqrt{64 + 4}$$

$$r = \sqrt{68}$$

หาค่า θ จากสมการที่ (5.10)

$$\tan \theta = \left(\frac{y}{x} \right)$$

แทนค่า

$$\tan \theta = \left(\frac{-2}{8} \right)$$

$$\tan \theta = -0.25 \quad (\text{เป็นมุมองศา})$$

จากตารางตรีโกณมิติตรงช่อง $\tan = -0.25$ แล้วเลื่อนไปทางซ้ายมือ จะตรงกับช่องมุม $\theta = 166^\circ$ แต่ $8 - i2$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4

$$\text{ดังนั้น} \quad \theta = 180^\circ + 166^\circ = 346^\circ$$

จากสมการที่ (5.7) จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วคือ

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

แทนค่า

$$z = \sqrt{68} (\cos 346^\circ + i\sin 346^\circ) \quad \text{ตอบ}$$

23. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = -2.8 - i4.4$ ในรูปเชิงขั้ว และมุมเป็นองศา

วิธีทำ รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $z = -2.8 - i4.4$

หาค่า r จากสมการที่ (5.9)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

แทนค่า

$$r = \sqrt{(-2.8)^2 + (-4.4)^2}$$

$$r = \sqrt{7.84 + 19.36}$$

$$r = \sqrt{27.2}$$

หาค่า θ จากสมการที่ (5.10)

$$\tan \theta = \left(\frac{y}{x} \right)$$

แทนค่า

$$\tan \theta = \left(\frac{-4.4}{-2.8} \right)$$

$$\tan \theta = 1.57 \quad (\text{เป็นมุมองศา})$$

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตรงช่อง $\tan$ จะเห็นว่า $\theta = 1.57$ ไม่มีค่าในตารางให้ใช้วิธีเปิดค่าใกล้เคียงมาเข้าอัตราส่วนเพื่อหาค่ามุม

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\tan$

	$\tan 1.5399$		$= 57^\circ$
	↓	↓	
ค่าเพิ่ม 0.0301	ค่าเพิ่ม x	ค่าเพิ่ม 1	
$\theta = 1.57$	ค่าเพิ่ม 0.0604 = ...		
	$\tan 1.6003$		$= 58^\circ$

นำค่าเพิ่มของทางด้านซ้ายมือและทางด้านขวามือมาเข้าอัตราส่วน จะได้

$$\frac{0.0301}{0.0604} = \frac{x}{1}$$

$$x = \frac{0.0301 \times 1}{0.0604} = 0.5$$

$$\therefore \theta = 57 + 0.5 = 57.5^\circ$$

แต่ $-2.8 - i4.4$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3

$$\text{ดังนั้น} \quad \theta = 180^\circ + 57.5^\circ = 237.5^\circ$$

จากสมการที่ (5.7) จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว คือ

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\text{แทนค่า} \quad z = \sqrt{27.2} (\cos 237.5^\circ + i\sin 237.5^\circ) \quad \text{ตอบ}$$

24. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = 1.2 - i1.9$ ในรูปเชิงขั้ว และมุมเป็นองศา

วิธีทำ รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $z = 1.2 - i1.9$

หาค่า r จากสมการที่ (5.9)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{แทนค่า} \quad r = \sqrt{(1.2)^2 + (-1.9)^2}$$

$$r = \sqrt{1.44 + 3.61}$$

$$r = \sqrt{5.05}$$

หาค่า θ จากสมการที่ (5.10)

$$\tan \theta = \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\text{แทนค่า} \quad \tan \theta = \left(\frac{1.2}{-1.9} \right)$$

$$\tan \theta = -0.632 \quad (\text{เป็นมุมองศา})$$

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตรงช่อง $\tan$ จะเห็นว่า $\theta = -0.632$ ไม่มีค่าในตารางให้ใช้วิธีเปิดค่า
ใกล้เคียงมาเข้าอัตราส่วนเพื่อหาค่ามุม

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\tan$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{ค่าเพิ่ม } -0.0174 \\ \downarrow \\ \tan -0.6494 \end{array} & & \begin{array}{c} \text{ค่าเพิ่ม } x \\ \downarrow \\ \tan -0.6249 \end{array} \\
 \left. \begin{array}{c} \text{ค่าเพิ่ม } -0.0174 \\ \text{ค่าเพิ่ม } -0.0245 = \dots \end{array} \right\} & & \left. \begin{array}{c} \text{ค่าเพิ่ม } x \\ \text{ค่าเพิ่ม } 1 \end{array} \right\} \\
 \theta = -0.632 & & = 147^\circ \\
 & & = 148^\circ
 \end{array}$$

นำค่าเพิ่มของทางด้านซ้ายมือและทางด้านขวามือมาเข้าอัตราส่วน จะได้

$$\begin{aligned}
 \frac{-0.0174}{-0.0245} &= \frac{x}{1} \\
 x &= \frac{-0.0174 \times 1}{-0.0245} = 0.71
 \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 147 + 0.71 = 147.71^\circ$$

แต่ $1.2 - i1.9$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4

$$\text{ดังนั้น } \theta = 180^\circ + 147.71^\circ = 327.71^\circ$$

จากสมการที่ (5.7) จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว คือ

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\text{แทนค่า } z = \sqrt{5.05} (\cos 327.71^\circ + i\sin 327.71^\circ)$$

ตอบ

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 6 เมทริกซ์

จงแสดงวิธีการคำนวณ

1. จงหาเมตริกซ์ทรานสโพสของ

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ นำสมาชิกในแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ทั้งแถวมาเรียงกันเป็นคอลัมน์ที่ 1

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

นำสมาชิกในแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ทั้งแถวมาเรียงกันเป็นคอลัมน์ที่ 2

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

นำสมาชิกในแถวที่ 3 ของเมทริกซ์ทั้งแถวมาเรียงกันเป็นคอลัมน์ที่ 3

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

ตอบ

2. จงหาเมตริกซ์ทรานสโพสของ

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 9 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ตอบ

3. จงหา $A + B$

กำหนด $A = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $A + B = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} -5+4 & 9+1 \\ 8+6 & 2+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 14 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ตอบ}$$

4. จงหา $B + A$

กำหนด $A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $B + A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$B + A = \begin{bmatrix} 1+(-4) & 6+5 \\ 4+1 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 11 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ตอบ}$$

5. จงหา $A + B$

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $A + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 9 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

ไม่สามารถหาผลบวกได้เนื่องจากเมทริกซ์ A และ B มีขนาดไม่เท่ากัน ตอบ

6. จงแสดงสมบัติการบวกของเมทริกซ์

1. $A + B = B + A$

2. $(A + B) + C = A + (B + C)$

เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 9 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 & 9+3 \\ 3+1 & 7+2 \\ 5+(-1) & 0+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 & 3+9 \\ 1+3 & 2+7 \\ -1+5 & 5+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$A + B = B + A$$

ตอบ

$$(A + B) + C = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + C$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 9 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+(-2) & 12+8 \\ 4+1 & 9+9 \\ 4+9 & 5+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 20 \\ 5 & 18 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A + (B + C) = A + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 9 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= A + \begin{bmatrix} 1+(-2) & 3+8 \\ 1+1 & 2+9 \\ -1+9 & 5+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 11 \\ 2 & 11 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + (-1) & 9 + 11 \\ 3 + 2 & 7 + 11 \\ 5 + 8 & 0 + 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 20 \\ 5 & 18 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

ตอบ

7. จงหาผลลบของเมทริกซ์ $A - B$

เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$A - B = A + (-B)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -5 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + (-1) & 3 + (-4) \\ 1 + (-5) & 2 + 3 \\ -1 + 1 & 5 + (-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ตอบ

8. จงหาผลลบของเมทริกซ์ $A - B$

$$\text{เมื่อ } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} A - B &= A + (-B) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ไม่สามารถหาผลบวกได้เนื่องจากเมทริกซ์ A และ B มีขนาดไม่เท่ากัน

ตอบ

9. จงหาผลลัพธ์ของเมทริกซ์ ดังนี้

1. $3A$

2. $2A + 2B$

$$\text{เมื่อ } A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

1. $3A$

$$\begin{aligned} 3A &= 3 \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 5 & 3 \times (-1) \\ 3 \times -2 & 3 \times 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 15 & -3 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ตอบ

2. $2A + 2B$

$$\begin{aligned} 2A + 2B &= 2 \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 + 6 & -2 + 4 \\ -4 + 2 & 2 + 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ตอบ

10. จงหาผลลัพธ์ของเมทริกซ์ ดังนี้

1. $3A$

2. $A - 3B$

เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ 1. $3A$

$$3A = 3 \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 15 & -9 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{ตอบ}$$

2. $A - 3B$

$$\begin{aligned} A - 3B &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -15 \\ -12 & 3 \\ 9 & -6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + (-3) & 4 + (-15) \\ 5 + (-12) & -3 + 3 \\ -1 + 9 & 2 + (-6) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -11 \\ -7 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

11. กำหนด $A = [1 \ 3 \ 4]$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ จงหา AB

วิธีทำ $C = A \times B = (1 \times 3) (3 \times 1) = (1 \times 1)$

$$C = [1 \ 3 \ 4] \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ให้นำคอลัมน์ของ B คูณกับแถวของ A แล้วบวกเข้าด้วยกัน

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \times \frac{4}{3} \times \frac{7}{4} \times = [3 \times 1 + 4 \times 3 + 7 \times 4]$$

$$C = [3 + 12 + 28]$$

$$C = 43$$

ตอบ

12. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $B = [1 \ 9 \ 3]$ จงหา AB

วิธีทำ

$$C = A \times B = (3 \times 1)(1 \times 3) = (3 \times 3)$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 9 \ 3]$$

ให้นำคอลัมน์ของ A คูณกับแถวของ B ทุกแถว

$$C = \begin{bmatrix} 5 \times 1 & 5 \times 9 & 5 \times 3 \\ 3 \times 1 & 3 \times 9 & 3 \times 3 \\ 1 \times 1 & 1 \times 9 & 1 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 45 & 15 \\ 3 & 27 & 9 \\ 1 & 9 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ตอบ}$$

13. กำหนด $A = [1 \ 2 \ 1]$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา AB

วิธีทำ

$$C = A \times B = (1 \times 3)(3 \times 2) = (1 \times 2)$$

$$C = [1 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ให้นำคอลัมน์ของ B คูณกับแถวของ A ทุกแถวแล้วบวกกัน

$$\begin{aligned} C &= [(1 \times 1) + (2 \times 1) + (1 \times -1) \quad (1 \times -4) + (2 \times 2) + (1 \times 2)] \\ &= [1 + 2 - 1 \quad -4 + 4 + 2] \\ &= [2 \ 2] \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

14. จงแสดงให้เห็นว่าเมทริกซ์ $AB \neq BA$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} (-1 \times -1) + (2 \times 1) & (-1 \times 2) + (2 \times 3) \\ (4 \times -1) + (1 \times 1) & (4 \times 2) + (1 \times 3) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 + 2 & -2 + 6 \\ -4 + 1 & 8 + 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$C = B \times A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} (-1 \times -1) + (2 \times 4) & (-1 \times 2) + (2 \times 1) \\ (1 \times -1) + (3 \times 4) & (1 \times 2) + (3 \times 1) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1+8 & -2+2 \\ -1+12 & 2+3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า $AB \neq BA$ ตอบ

15. จงคูณเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $C = A \times B = (2 \times 3)(3 \times 2) = (2 \times 2)$

ให้นำแถวของ A คูณกับคอลัมน์ของ B ทุกคอลัมน์แล้วบวกกัน

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} (1 \times 1) + (-1 \times -1) + (5 \times 1) & (1 \times 3) + (-1 \times 2) + (5 \times -5) \\ (2 \times 1) + (8 \times -1) + (-3 \times 1) & (2 \times 3) + (8 \times 2) + (-3 \times -5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1+5 & 3-2-25 \\ 2-8-3 & 6+16+15 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 7 & -24 \\ -9 & 37 \end{bmatrix}$$

ตอบ

16. จงคูณเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$C = A \times B = (3 \times 2)(2 \times 3) = (3 \times 3)$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

ให้นำคอลัมน์ของ B คูณกับแถวของ A ทุกแถวแล้วบวกกัน

$$C = \begin{bmatrix} (2 \times 1) + (1 \times 1) & (2 \times -1) + (1 \times 9) & (2 \times 3) + (1 \times 4) \\ (-3 \times 1) + (1 \times 1) & (-3 \times -1) + (1 \times 9) & (-3 \times 3) + (1 \times 4) \\ (1 \times 1) + (4 \times 1) & (1 \times -1) + (4 \times 9) & (1 \times 3) + (4 \times 4) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 + 1 & -2 + 9 & 6 + 4 \\ -3 + 1 & 3 + 9 & -9 + 4 \\ 1 + 4 & -1 + 36 & 3 + 16 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 10 \\ -2 & 12 & -5 \\ 5 & 35 & 19 \end{bmatrix} \quad \text{ตอบ}$$

17. จงคูณเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$ และเมทริกซ์เอกลักษณ์ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$AI = A$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (3 \times 1) + (-4 \times 0) & (3 \times 0) + (-4 \times 1) \\ (1 \times 1) + (9 \times 0) & (1 \times 0) + (9 \times 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 + 0 & 0 + (-4) \\ 1 + 0 & 0 + 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

หรือ $IA = A$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (1 \times 3) + (0 \times 1) & (1 \times -4) + (0 \times 9) \\ (0 \times 3) + (1 \times 1) & (0 \times -4) + (1 \times 9) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 + 0 & (-4) + 0 \\ 0 + 1 & 0 + 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

18. จงหาค่า x, y, z จากเมทริกซ์ในรูปของระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} 4x & 3y \\ w & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากัน

$$\begin{array}{ll} \therefore & 4x = 8 \\ & x = \frac{8}{4} = 2 & \text{ตอบ} \\ & 3y = 2 \\ & y = \frac{2}{3} & \text{ตอบ} \\ & w = 7 & \text{ตอบ} \\ & z = -1 & \text{ตอบ} \end{array}$$

19. จงหาค่า x, y จากเมทริกซ์ในรูปของระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} 3 & 2x + 3y \\ x & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากัน

$$\begin{array}{ll} \therefore & x = 6 & \text{ตอบ} \\ & 2x + 3y = 3 \\ \text{แทนค่า} & 2 \times 6 + 3y = 3 \\ & 3y = 3 - 12 \\ & y = \frac{-9}{3} = -3 & \text{ตอบ} \end{array}$$

20. จงหาค่า x, y จากเมทริกซ์ในรูปของระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} 3x & 3x + 3y \\ y & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากัน

$$\begin{array}{ll} \therefore & y = 1 & \text{ตอบ} \\ & 3x = 3 \\ \text{แทนค่า} & x = \frac{3}{3} \\ & x = 1 & \text{ตอบ} \end{array}$$

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 7 ดีเทอร์มิแนนต์

จงแสดงวิธีการคำนวณ

1. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $|A| = \begin{vmatrix} 9 & -7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (9)(5) - (1)(-7)$

$$|A| = 45 + 7 = 52$$

ตอบ

2. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $|A| = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (-4)(6) - (3)(-2)$

$$|A| = -24 + 6 = -18$$

ตอบ

3. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $|A| = \begin{vmatrix} 4 & -9 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = (4)(-8) - (6)(-9)$

$$|A| = -32 + 54 = -22$$

ตอบ

4. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $|A| = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} = (-5)(9) - (-7)(3)$

$$|A| = -45 + 21 = -24$$

ตอบ

5. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = (2)(-6) - (-1)(7)$

$$|A| = -12 + 7 = -5$$

ตอบ

6. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีโดยตรง

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 9 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 9 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$

$$= (3)(4)(0) + (7)(9)(2) + (8)(2)(-4) - (2)(4)(8) - (-4)(9)(3) - (0)(2)(7)$$

$$|A| = 0 + 126 - 64 - 64 + 108 - 0 = 106 \quad \text{ตอบ}$$

7. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีโดยตรง

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= (1)(1)(0) + (2)(1)(2) + (-3)(-1)(1) - (2)(1)(-3) - (1)(1)(1) - (0)(-1)(2)$$

$$|A| = 0 + 4 + 3 + 6 - 1 + 0 = 12 \quad \text{ตอบ}$$

8. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีโดยตรง

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$

$$= (3)(-2)(4) + (-1)(1)(2) + (2)(1)(-3) - (2)(-2)(2) - (-3)(1)(3) - (4)(1)(-1)$$

$$|A| = -24 - 2 - 6 + 8 + 9 + 4 = -11 \quad \text{ตอบ}$$

9. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีการกระจาย

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ โดยเลือกแถวแรกของเมทริกซ์

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(3 \times 1 - (-1 \times 2)) - 1(0 \times 1 - 1 \times 2) + 0(0 \times (-1) - 1 \times 3) \\ &= 2(3 + 2) - 1(0 - 2) + 0 \\ &= 10 + 2 + 0 \end{aligned}$$

$$|A| = 12 \qquad \text{ตอบ}$$

10. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีการกระจาย

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ โดยเลือกแถวแรกของเมทริกซ์

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(5 \times 2 - 1 \times 4) + 1(-6 \times 2 - 5 \times 4) + 3(-6 \times 1 - 5 \times 5) \\ &= 2(10 - 4) + 1(-12 - 20) + 3(-6 - 25) \\ &= 12 - 32 - 93 \end{aligned}$$

$$|A| = -113 \qquad \text{ตอบ}$$

11. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีการกระจาย

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ โดยเลือกแถวแรกของเมทริกซ์

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(1 \times (-3) - 2 \times 6) - 1(2 \times (-3) - 4 \times 6) + 6(2 \times 2 - 4 \times 1) \\ &= 2(-3 - 12) - 1(-6 - 24) + 6(4 - 4) \\ &= -30 + 30 + 0 \end{aligned}$$

$$|A| = 0 \qquad \text{ตอบ}$$

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 8

การประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

1. จงแก้ระบบสมการด้วยกฎของเครเมอร์

$$3x - 4y = -4$$

$$9x + 2y = 9$$

วิธีทำ เขียนระบบสมการให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

แทนค่า $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \end{bmatrix}$

ซึ่งตัวแปร $x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(-4 \times 2) - (9 \times -4)}{(3 \times 2) - (9 \times -4)}$$

$$= \frac{-8 + 36}{6 + 36} = \frac{28}{42}$$

$$= \frac{14}{21}$$

และตัวแปร $y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 9 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(3 \times 9) - (9 \times -4)}{(3 \times 2) - (9 \times -4)}$$

$$= \frac{27 + 36}{6 + 36}$$

$$= \frac{21}{14}$$

$\therefore$ คำตอบของระบบสมการนี้คือ $x = \frac{14}{21}$ และ $y = \frac{21}{14}$

ตอบ

2. จงแก้ระบบสมการด้วยกฎของเครเมอร์

$$x + y = 7$$

$$4x + 3y = 12$$

วิธีทำ เขียนระบบสมการให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

แทนค่า $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$

ซึ่งตัวแปร x $x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 12 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(7 \times 3) - (12 \times 1)}{(1 \times 3) - (4 \times 1)}$$

$$= \frac{21 - 12}{3 - 4} = \frac{9}{-1} = -9$$

และตัวแปร y $y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(1 \times 12) - (4 \times 7)}{(1 \times 3) - (4 \times 1)}$$

$$= \frac{12 - 28}{3 - 4} = \frac{-16}{-1} = 16$$

$\therefore$ คำตอบของระบบสมการนี้ คือ $x = -9$ และ $y = 16$ **ตอบ**

3. จงแก้ระบบสมการด้วยกฎของเครเมอร์

$$3x + y = 3$$

$$6x - 3y = -3$$

วิธีทำ เขียนระบบสมการให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

แทนค่า

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ซึ่งตัวแปร x

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{(3 \times -3) - (-3 \times 1)}{(3 \times -3) - (6 \times 1)}$$

$$= \frac{-9+3}{-9-6}$$

$$= \frac{-6}{-15}$$

$$x = 0.4$$

และตัวแปร y

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{(3 \times -3) - (6 \times 3)}{(3 \times -3) - (6 \times 1)}$$

$$= \frac{-9-18}{-9-6}$$

$$= \frac{-27}{-15}$$

$$y = 1.8$$

$\therefore$ คำตอบของระบบสมการนี้ คือ $x = 0.4$ และ $y = 1.8$

ตอบ

4. จงแก้ระบบสมการด้วยกฎของเครเมอร์

$$5x + 4z = 53$$

$$2x + 3y = 28$$

$$3y + 4z = 46$$

วิธีทำ เขียนระบบสมการให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 \\ 28 \\ 46 \end{bmatrix}$$

ใช้วิธีการกระจายหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์เพื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้น

$$x = \frac{\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 53 & 0 & 4 \\ 28 & 3 & 0 \\ 46 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{53(3 \times 4 - 3 \times 0) - 0(28 \times 4 - 46 \times 0) + 4(28 \times 3 - 46 \times 3)}{5(3 \times 4 - 3 \times 0) - 0(2 \times 4 - 0 \times 0) + 4(2 \times 3 - 0 \times 3)} \\ &= \frac{53(12 - 0) - 0 + 4(84 - 138)}{5(12 - 0) - 0 + 4(6 - 0)} \\ &= \frac{636 - 216}{60 + 24} \\ &= \frac{420}{84} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 53 & 4 \\ 2 & 28 & 0 \\ 0 & 46 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{5(28 \times 4 - 46 \times 0) - 2(53 \times 4 - 46 \times 4) + 0(53 \times 0 - 28 \times 4)}{5(3 \times 4 - 3 \times 0) - 0(2 \times 4 - 0 \times 0) + 4(2 \times 3 - 0 \times 3)} \\
 &= \frac{5(112 - 0) - 2(212 - 184) + 0}{5(12 - 0) - 0 + 4(6 - 0)} \\
 &= \frac{560 - 56}{60 + 24} \\
 &= \frac{504}{84} \\
 y &= 6
 \end{aligned}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 53 \\ 2 & 3 & 28 \\ 0 & 3 & 46 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{5(3 \times 46 - 3 \times 28) - 0(2 \times 46 - 0 \times 28) + 53(2 \times 3 - 0 \times 3)}{5(3 \times 4 - 3 \times 0) - 0(2 \times 4 - 0 \times 0) + 4(2 \times 3 - 0 \times 3)} \\
 &= \frac{5(138 - 84) - 0 + 53(6 - 0)}{5(12 - 0) - 0 + 4(6 - 0)} \\
 &= \frac{270 + 318}{60 + 24} \\
 &= \frac{588}{84} \\
 z &= 7
 \end{aligned}$$

∴ คำตอบของระบบสมการนี้ คือ $x = 5$, $y = 6$ และ $z = 7$

ตอบ

5. จงแก้ระบบสมการด้วยกฎของเครเมอร์

$$x + y - 2z = 1$$

$$-x + 2y + z = -1$$

$$y - z = 2$$

วิธีทำ เขียนระบบสมการให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ใช้วิธีการกระจายหาของค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์เพื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้น

$$x = \frac{\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1(2 \times (-1) - 1 \times 1) - 1(-1 \times (-1) - 2 \times 1) + (-2)(-1 \times 1 - 2 \times 2)}{1(2 \times (-1) - 1 \times 1) - (-1)(1 \times (-1) - 1 \times (-2)) + 0(2 \times (-2) - 1 \times 1)} \\ &= \frac{1(-2-1)-1(1-2)-2(-1-4)}{1(-2-1)+1(-1+2)+0} \\ &= \frac{-3+1+10}{-3+1} \\ &= \frac{8}{-2} \\ x &= -4 \end{aligned}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1(-1 \times (-1) - 2 \times 1) - 1(1 \times (-1) - 2 \times (-2)) + 0(-1 \times 1 - 1 \times (-2))}{1(2 \times (-1) - 1 \times 1) - (-1)(1 \times (-1) - 1 \times (-2)) + 0(2 \times (-2) - 1 \times 1)} \\
 &= \frac{1(1-2) - 1(-1+4) + 0}{1(-2-1) + 1(-1+2) + 0} \\
 &= \frac{-1+3}{-3+1} \\
 &= \frac{2}{-2}
 \end{aligned}$$

$$y = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1(2 \times 2 - 1 \times (-1)) - (-1)(1 \times 2 - 1 \times 1) + 0(1 \times (-1) - 2 \times 1)}{1(2 \times (-1) - 1 \times 1) - (-1)(1 \times (-1) - 1 \times (-2)) + 0(2 \times (-2) - 1 \times 1)} \\
 &= \frac{1(4+1) + 1(2-1) + 0}{1(-2-1) + 1(-1+2) + 0} \\
 &= \frac{5+1}{-3+1} \\
 &= \frac{6}{-2} \\
 z &= -3
 \end{aligned}$$

∴ คำตอบของระบบสมการนี้ คือ $x = -4, y = -1$ และ $z = -3$ **ตอบ**

6. จงแก้ระบบสมการด้วยกฎของเครเมอร์

$$2x - 4y + 6z = 8$$

$$4x - 2y + 2z = -2$$

$$4x + y + 2z = 4$$

วิธีทำ เขียนระบบสมการให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ใช้วิธีการกระจายหาของค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์เพื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้น

$$x = \frac{\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 8 & -4 & 6 \\ -2 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{8(-2 \times 2 - 1 \times 2) - (-4)(-2 \times 2 - 4 \times 2) + 6(-2 \times 1 - 4 \times (-2))}{2(-2 \times 2 - 1 \times 2) - (-4)(4 \times 2 - 4 \times 2) + 6(4 \times 1 - 4 \times (-2))} \\ &= \frac{8(-4-2) + 4(-4-8) + 6(-2+8)}{2(-4-2) + 0 + 6(4+8)} \\ &= \frac{-48 - 48 + 36}{-12 + 72} \\ &= \frac{-60}{60} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2(-2 \times 2 - 4 \times 2) - 8(4 \times 2 - 4 \times 2) + 6(4 \times 4 - 4 \times (-2))}{2(-2 \times 2 - 1 \times 2) - (-4)(4 \times 2 - 4 \times 2) + 6(4 \times 1 - 4 \times (-2))} \\ &= \frac{2(-4-8) - 8(8-8) + 6(16+8)}{2(-4-2) + 0 + 6(4+8)} \end{aligned}$$

$$= \frac{-24 - 0 + 144}{-12 + 72}$$

$$= \frac{120}{60}$$

$$y = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 4 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2(-2 \times 4 - 1 \times (-2)) - (-4)(4 \times 4 - 4 \times (-2)) + 8(4 \times 1 - 4 \times (-2))}{2(-2 \times 2 - 1 \times 2) - (-4)(4 \times 2 - 4 \times 2) + 6(4 \times 1 - 4 \times (-2))}$$

$$= \frac{2(-8+2) + 4(16+8) + 8(4+8)}{2(-4-2) + 0 + 6(4+8)}$$

$$= \frac{-12 + 96 + 96}{-12 + 72}$$

$$= \frac{180}{60}$$

$$z = 3$$

$\therefore$ คำตอบของระบบสมการนี้ คือ $x = -1, y = 2$ และ $z = 3$ **ตอบ**

7. สารละลาย x มีความเข้มข้น 12% และสารละลาย y มีความเข้มข้น 27% ถูกนำมาผสมกันเพื่อให้มีความเข้มข้น 24% และมีปริมาตร 15 ลิตร จงหาปริมาตรของสารละลาย x และสารละลาย y

วิธีทำ กำหนดให้สารละลายที่มีความเข้มข้น 12% คือ x

และให้สารละลายที่มีความเข้มข้น 27% คือ y

ต้องการผสมสารละลาย x และ y ให้มีปริมาตร 15 ลิตร

ปริมาณของสารละลาย	x	y	15 l

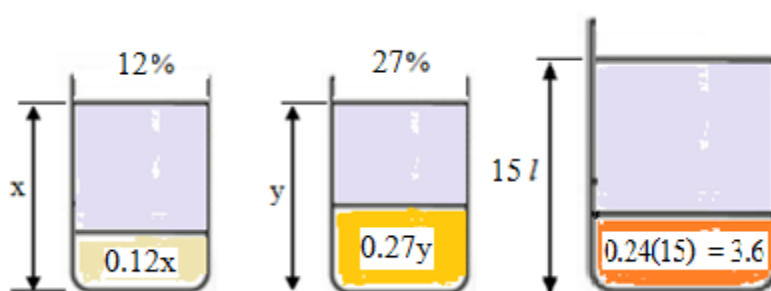
$$\therefore \quad x + y = 15 \quad (1)$$

ต้องการผสมสารละลาย x และ y ให้มีความเข้มข้น 24% ของปริมาตร 15 ลิตร

	12%	27%	24%
ปริมาณของสารละลาย	x	y	15 l
ปริมาณของสารเคมี	0.12x	0.27y	0.24(15) = 3.6 l

∴ จำนวนของสารเคมีในสารละลาย x และ y คือ

$$0.12x + 0.27y = 3.6 \quad (2)$$



เขียนระบบสมการ (1) และ (2) ให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

แทนค่า $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.12 & 0.27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 3.6 \end{bmatrix}$

สารละลาย $x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 15 & 1 \\ 3.6 & 0.27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.12 & 0.27 \end{vmatrix}} = \frac{(15 \times 0.27) - (3.6 \times 1)}{(1 \times 0.27) - (0.12 \times 1)}$$

$$x = \frac{4.05 - 3.6}{0.27 - 0.12} = \frac{0.45}{0.15}$$

$$x = 3 \text{ l}$$

$$\begin{aligned}
 \text{สารละลาย} \quad y &= \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 0.12 & 3.6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.12 & 0.27 \end{vmatrix}} = \frac{(1 \times 3.6) - (0.12 \times 15)}{(1 \times 0.27) - (0.12 \times 1)} \\
 &= \frac{3.6 - 1.8}{0.27 - 0.12} = \frac{1.8}{0.15} \\
 y &= 12 \text{ l}
 \end{aligned}$$

$\therefore$ สารละลาย x = 3 l และสารละลาย y = 12 l ตอบ

8. น้ำยาหล่อเย็นรถยนต์มีสารป้องกันน้ำแข็งตัวคือ สารเอทิลีน ไกลคอล (Ethylene Glycol) 85% ถูกผสมกับน้ำเพื่อให้มีสารเอทิลีน ไกลคอล 60% และมีส่วนผสมทั้งหมด 35 ลิตร จงหาปริมาณของสารเอทิลีน ไกลคอล และปริมาณของน้ำ

วิธีทำ กำหนดให้ปริมาณของสารเอทิลีน ไกลคอลคือ x และน้ำ คือ y

ต้องการส่วนผสมทั้งหมด 35 ลิตร

ปริมาณของส่วนผสม	x	y	35 l

$$\therefore x + y = 35 \quad (1)$$

ต้องการผสมสารเอทิลีน ไกลคอล x และน้ำ y ให้มีความเข้มข้น 50% ของปริมาณทั้งหมด 20 ลิตร

	85%	0%	60%
ปริมาณของส่วนผสม	x	y	35 l
ปริมาณของสารเอทิลีน ไกลคอล	0.85x	0y	0.6(35) = 21 l

∴ จำนวนของสารเคมีในสารละลาย x และ y คือ

$$0.85x + 0y = 21 \quad (2)$$

เขียนระบบสมการ (1) และ (2) ให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

แทนค่า $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.85 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 21 \end{bmatrix}$

ปริมาณของสารเอทิลีนไกลคอล, $x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 35 & 1 \\ 21 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.85 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(35 \times 0) - (21 \times 1)}{(1 \times 0) - (0.85 \times 1)}$$

$$x = \frac{-21}{-0.85}$$

$$x = 24.71 \text{ l}$$

และปริมาณของน้ำ $y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 35 \\ 0.85 & 21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.85 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(1 \times 21) - (0.85 \times 35)}{(1 \times 0) - (0.85 \times 1)}$$

$$= \frac{-8.75}{-0.85}$$

$$y = 10.29 \text{ l}$$

∴ ปริมาณของสารเอทิลีนไกลคอล = 24.71 l

และปริมาณของน้ำ = 10.29 l

ตอบ

9. เครื่องบินโดยสารลำหนึ่ง บินจากสนามบินดอนเมืองไปสนามบินเชียงใหม่มีระยะทาง 880 กิโลเมตร ด้วยเวลา 1 ชั่วโมง 20 นาที และเที่ยวบินกลับด้วยระยะทางเดียวกันใช้เวลา 1 ชั่วโมง จงหาความเร็วของเครื่องบิน และความเร็วของอากาศสมมติให้ความเร็วทั้งสองมีค่าคงที่

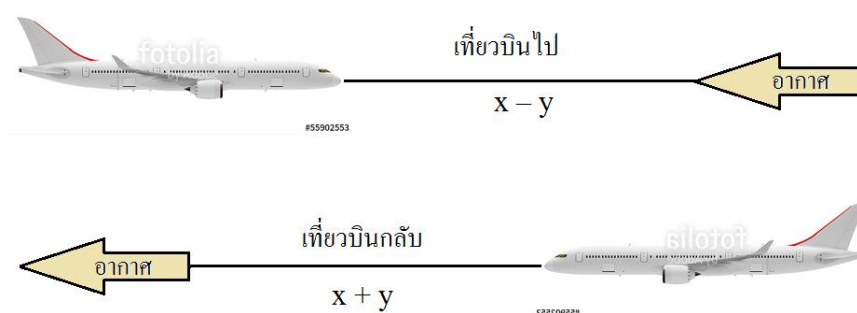
วิธีทำ เวลาที่ใช้ในการเดินทางจากสนามบินดอนเมืองไปสนามบินเชียงใหม่ มากกว่าเวลาที่ใช้ในการเดินทางจากสนามบินเชียงใหม่กลับสนามบินดอนเมือง แสดงว่ามีการต้านทานของอากาศ

กำหนดให้ความเร็วของเครื่องบินคือ x และความเร็วของอากาศคือ y

เที่ยวบินไปมีความเร็ว $= x - y$

เที่ยวบินกลับมีความเร็ว $= x + y$

ดังแสดงในรูป



ใช้สมการระยะทาง คือ ระยะทาง $=$ ความเร็ว $\times$ เวลา

$$\therefore \text{เที่ยวบินไป} \quad 880 \text{ km} = (x - y)\left(1 + \frac{20}{60}\right)$$

$$1.3x - 1.33y = 880 \quad (1)$$

$$\text{เที่ยวบินกลับ} \quad 880 \text{ km} = (x + y)(1 \text{ hr})$$

$$x + y = 880 \quad (2)$$

เขียนระบบสมการ (1) และ (2) ให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

แทนค่า $\begin{bmatrix} 1.33 & -1.33 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 880 \\ 880 \end{bmatrix}$

ซึ่งความเร็วของเครื่องบิน, $x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 880 & -1.33 \\ 880 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.33 & -1.33 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(880 \times 1) - (880 \times (-1.33))}{(1.33 \times 1) - (1 \times (-1.33))}$$

$$x = \frac{880 + 1,170.4}{1.33 + 1.33} = \frac{2,050.4}{2.66}$$

$$x = 770.83 \text{ km/hr}$$

และความเร็วของอากาศ

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1.33 & 880 \\ 1 & 880 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.33 & -1.33 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(1.33 \times 880) - (1 \times 880)}{(1.33 \times 1) - (1 \times (-1.33))}$$

$$= \frac{1,170.4 - 880}{1.33 + 1.33} = \frac{290.4}{2.66}$$

$$y = 109.17 \text{ km/hr}$$

∴ ความเร็วของเครื่องบิน = 770.83 km/hr

ความเร็วของอากาศ = 109.17 km/hr

ตอบ

10. นายเอกเดินทางไปเชียงรายโดยทางรถยนต์และเครื่องบินด้วยระยะทางทั้งหมด 950 กิโลเมตร และรวมเวลาทั้งหมด 3 ชั่วโมง โดยขับรถยนต์ไปสนามบินด้วยความเร็วเฉลี่ย 90 กิโลเมตร/ชั่วโมง และเครื่องบินใช้ความเร็วเฉลี่ย 750 กิโลเมตร/ชั่วโมง จงหาเวลาที่นายเอกขับรถยนต์ไปสนามบินและเวลาที่เครื่องบินบินไปเชียงราย

วิธีทำ กำหนดให้เวลาที่ขับรถยนต์ไปสนามบินคือ x และเวลาที่เครื่องบินบินไปเชียงรายคือ y

เวลาที่ใช้ในการเดินทางทั้งหมด $x + y = 3$ (1)

ระยะทางทางรถยนต์ = ความเร็ว × เวลา = 90x

ระยะทางทางเครื่องบิน = ความเร็ว × เวลา = 750y

∴ ระยะทางทั้งหมด คือ $90x + 750y = 950$ (2)

เขียนระบบสมการ (1) และ (2) ให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

แทนค่า $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 90 & 750 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 950 \end{bmatrix}$

ซึ่งเวลาขับรถยนต์,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 950 & 750 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 90 & 750 \end{vmatrix}} = \frac{(3 \times 750) - (950 \times 1)}{(1 \times 750) - (90 \times 1)}$$

$$x = \frac{2,250 - 950}{750 - 90} = \frac{1,300}{660}$$

$$x = 1.97 \text{ hr}$$

และเวลาเครื่องบิน

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 90 & 950 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 90 & 750 \end{vmatrix}} = \frac{(1 \times 950) - (90 \times 3)}{(1 \times 750) - (90 \times 1)}$$

$$y = \frac{950 - 270}{750 - 90} = \frac{680}{660}$$

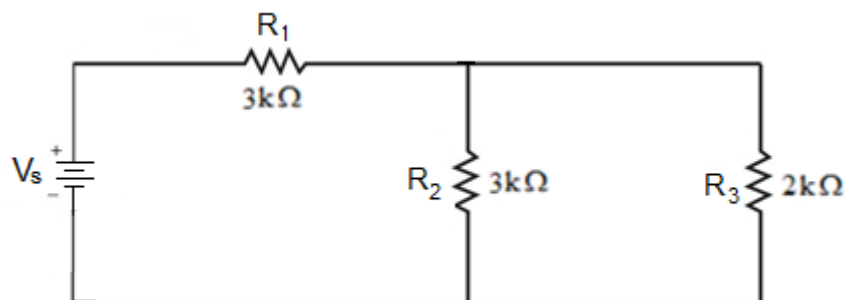
$$= 0.95 \text{ hr}$$

$$\therefore \text{เวลาขับรถยนต์} = 1.97 \text{ hr}$$

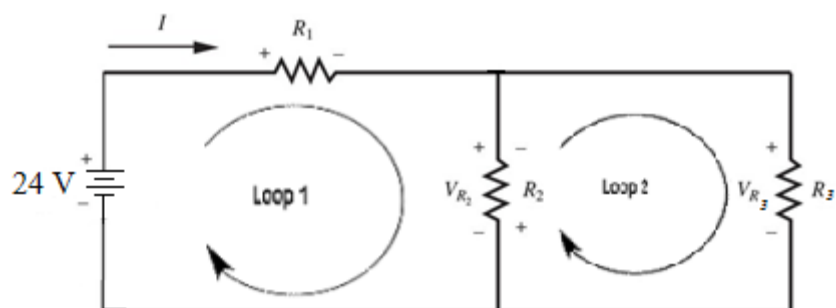
$$\text{เวลาเครื่องบิน} = 1.03 \text{ hr}$$

ตอบ

11. จงหาค่ากระแสไฟฟ้า I_1 และ I_2 ที่ไหลผ่านในวงจร ดังแสดงในรูป

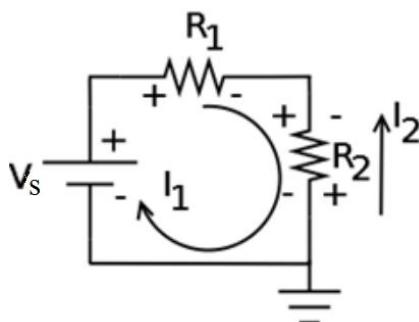


วิธีทำ กำหนดลูปและทิศทางของลูป และกำหนดขั้วไฟฟ้าให้กับอุปกรณ์ไฟฟ้า



ใช้กฎในเรื่องแรงดันไฟฟ้า (Kirchhoff's Voltage Law; KVL) คือผลรวมของแรงดันไฟฟ้ารอบวงปิด (Loop) = 0

ที่ลูป 1 กระแสไฟฟ้า I_1 จะไหลผ่าน R_1, R_2 และที่ R_2 จะมีกระแส I_2 จากลูปที่ 2 ไหลผ่านแต่เป็นการไหลสวนทางกัน



ใช้กฎแรงเคลื่อนไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ โดยเริ่มที่มุมบนซ้ายมือไปตามเข็มนาฬิกา

$$I_1 R_1 + (I_1 - I_2) R_2 - 24 = 0$$

$$I_1 R_1 + I_1 R_2 - I_2 R_2 = 24$$

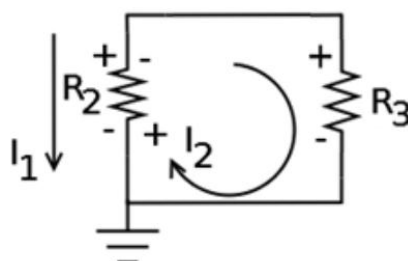
$$(R_1 + R_2) I_1 - I_2 R_2 = 24$$

แทนค่า $(3\text{k}\Omega + 3\text{k}\Omega) I_1 - 3\text{k}\Omega (I_2) = 24$

$$6\text{k}\Omega (I_1) - 3\text{k}\Omega (I_2) = 24$$

$$6I_1 - 3I_2 = 24 \quad (1)$$

ที่รูป 2 กระแสไฟฟ้า I_2 จะไหลผ่าน R_3 และไหลผ่าน R_2 ซึ่งก็จะไหลสวนทางกับ I_1



ใช้กฎแรงเคลื่อนไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ โดยเริ่มที่มุมบนขวามือไปตามเข็มนาฬิกา

$$I_2 R_3 + (I_2 - I_1) R_2 = 0$$

$$I_2 R_3 + I_2 R_2 - I_1 R_2 = 0$$

$$(R_2 + R_3) I_2 - I_1 R_2 = 0$$

แทนค่า $(3\text{k}\Omega + 2\text{k}\Omega) I_2 - 3\text{k}\Omega (I_1) = 0$

$$-3I_1 + 5I_2 = 0 \quad (2)$$

เขียนระบบสมการ (1) และ (2) ให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

แทนค่า $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \end{bmatrix}$

ซึ่งกระแสไฟฟ้า , $I_1 = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 24 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{(24 \times 5) - (0 \times (-3))}{(6 \times 5) - (-3 \times (-3))}$$

$$= \frac{120-0}{30-9} = \frac{120}{21}$$

$$I_1 = 5.71 \text{ A}$$

และกระแสไฟฟ้า,
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

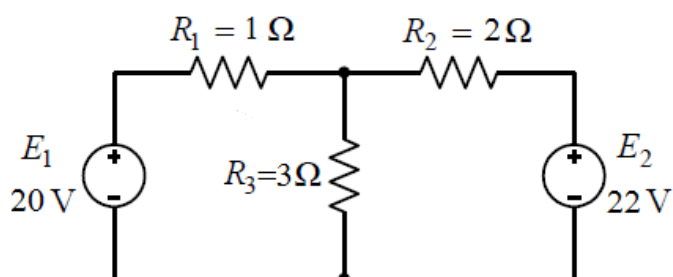
$$= \frac{\begin{vmatrix} 6 & 24 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{(6 \times 0) - (-3 \times 24)}{(6 \times 5) - (-3 \times (-3))}$$

$$= \frac{0+72}{30-9} = \frac{72}{21}$$

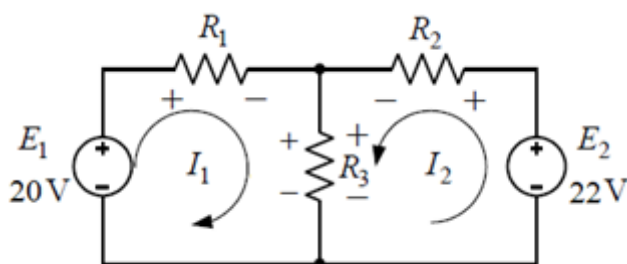
$$I_2 = 3.43 \text{ A}$$

∴ คำตอบของระบบสมการนี้คือ $I_1 = 5.71 \text{ A}$ และ $I_2 = 3 \text{ A}$ **ตอบ**

12. จงหาค่ากระแสไฟฟ้า I_1 และ I_2 ที่ไหลผ่านในวงจร ดังแสดงในรูป



วิธีทำ กำหนดลูปกระแส (I_1) และลูปกระแส (I_2) ให้มีทิศทางตามหัวของแหล่งจ่ายแรงดัน (ออกจากขั้วบวกเข้าหาขั้วลบ) ทั้ง 2 ลูปและกำหนดหัวของแรงดันไฟฟ้าตกคร่อมตัวต้านทาน



ใช้กฎในเครื่องแรงดันไฟฟ้า (Kirchhoff's Voltage Law; KVL) คือผลรวมของแรงดันไฟฟ้ารอบวงปิด (Loop) = 0

$$\begin{aligned}
 \text{ลูป 1} \quad & V_{R1} + V_{R3} - 20V = 0 \\
 & I_1 R_1 + (I_1 + I_2) R_3 = 20V \\
 \text{แทนค่า R} \quad & 1I_1 + 3(I_1 + I_2) = 20V \\
 & 3I_1 + 3I_1 + 3I_2 = 20V \\
 & 6I_1 + 3I_2 = 20V \quad (1)
 \end{aligned}$$

(ที่ R_3 จะมีกระแสไฟฟ้า I_1 และ I_3 ไหลผ่านในทิศทางเดียวกัน)

$$\begin{aligned}
 \text{ลูป 2} \quad & V_{R2} + V_{R3} - 22V = 0 \\
 & I_2 R_2 + (I_1 + I_2) R_3 = 22V \\
 \text{แทนค่า R} \quad & 2I_2 + 3(I_1 + I_2) = 22V \\
 & 2I_2 + 3I_1 + 3I_2 = 22V \\
 & 3I_1 + 5I_2 = 22V \quad (2)
 \end{aligned}$$

เขียนระบบสมการ (1) และ (2) ให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$\text{แทนค่า} \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ซึ่งกระแสไฟฟ้า} \quad I_1 &= \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{\begin{vmatrix} 20 & 3 \\ 22 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{(20 \times 5) - (22 \times 3)}{(6 \times 5) - (3 \times 3)}
 \end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{100 - 66}{30 - 9} = \frac{34}{21} = 1.62 \text{ A}$$

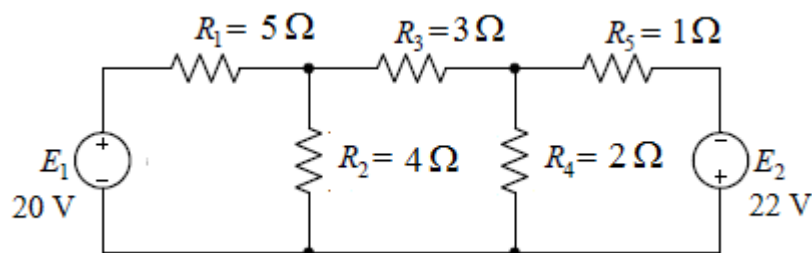
$$\text{และกระแสไฟฟ้า} \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 6 & 20 \\ 3 & 22 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{(6 \times 22) - (3 \times 20)}{(6 \times 5) - (3 \times 3)}$$

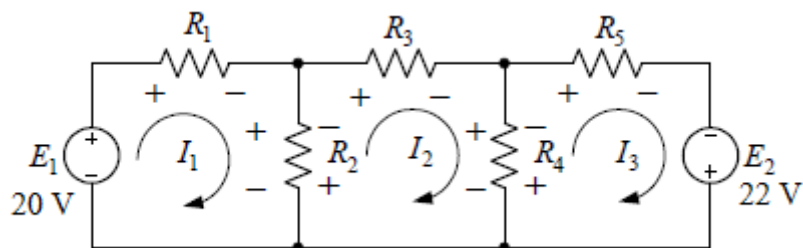
$$I_2 = \frac{132 - 60}{30 - 9} = \frac{72}{21} = 3.43 \text{ A}$$

∴ คำตอบของระบบสมการนี้คือ $I_1 = 162 \text{ A}$ และ $I_2 = 3.43 \text{ A}$ **ตอบ**

13. จงหาค่ากระแสไฟฟ้า I_1 , I_2 และ I_3 ที่ไหลผ่านในวงจร ดังแสดงในรูป



วิธีทำ กำหนดลูปกระแส I_1 , I_2 และ I_3 ให้มีทิศทางตามหัวของแหล่งจ่ายแรงดัน (ออกจากขั้วบวกเข้าหาขั้วลบ) ทั้ง 3 ลูปและกำหนดหัวของแรงดันไฟฟ้าตกคร่อมตัวต้านทาน



ใช้กฎในเรื่องแรงดันไฟฟ้า (Kirchhoff's Voltage Law; KVL) คือผลรวมของแรงดันไฟฟ้ารอบวงปิด (Loop) = 0

ลูป 1 $V_{R1} + V_{R2} - 20V = 0$
 $I_1 R_1 + (I_1 - I_2) R_2 = 20V$

แทนค่า R $5I_1 + 3(I_1 - I_2) = 20V$
 $5I_1 + 3I_1 - 3I_2 = 20V$
 $8I_1 - 3I_2 = 20V \quad (1)$

ลูป 2 $V_{R3} + V_{R4} + V_{R2} = 0$
 $I_2 R_3 + (I_2 - I_3) R_4 + (I_2 - I_1) R_2 = 0$

แทนค่า R $3I_2 + 2(I_2 - I_3) + 4(I_2 - I_1) = 0$

$$\begin{aligned} 3I_2 + 2I_2 - 2I_3 + 4I_2 - 4I_1 &= 0 \\ -4I_1 + 9I_2 - 2I_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ลูป 3 $V_{R5} + V_{R4} + 22V = 0$

แทนค่า R $I_3 R_5 + (I_3 - I_2) R_4 = -22V$

$$\begin{aligned} 1I_3 + 2(I_3 - I_2) &= -22V \\ I_3 + 2I_3 - 2I_2 &= -22V \\ -2I_2 + 3I_3 &= -22V \end{aligned} \quad (3)$$

เขียนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ -22 \end{bmatrix}$$

ใช้วิธีการกระจายหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์เพื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้น

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & -2 \\ -22 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{20(9 \times 3 - (-2) \times (-2)) - (-3)(0 \times 3 - (-22) \times (-2)) + 0(0 \times (-2) - (-22) \times (9))}{5(9 \times 3 - (-2) \times (-2)) - (-3)((-4) \times 3 - 0 \times (-2)) + 0(-4 \times (-2) - 0 \times (9))}$$

$$= \frac{20(27-4) + 3(0-44) + 0}{5(27-4) + 3(-12+0) + 0}$$

$$= \frac{20(23)+3(-44)}{5(23)+3(-12)}$$

$$= \frac{460-132}{115-36}$$

$$= \frac{328}{79}$$

$$I_1 = 4.15 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 20 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & -22 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}} =$$

$$\frac{5(0 \times 3 - (-22) \times (-2)) - 20(-4 \times 3 - 0 \times (-2)) + 0(-4 \times (-22) - 0 \times 0)}{5(9 \times 3 - (-2) \times (-2)) - (-3)((-4) \times 3 - 0 \times (-2)) + 0(-4 \times (-2) - 0 \times (9))}$$

$$= \frac{5(0+22)-20(-12-0)+0}{5(27-4)+3(-12+0)+0}$$

$$= \frac{5(22)-20(-12)}{5(23)+3(-12)}$$

$$= \frac{110+240}{115-36}$$

$$= \frac{350}{79}$$

$$I_2 = 4.43 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 & 20 \\ -4 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & -22 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}} =$$

$$\frac{5(9 \times (-22) - (-2) \times 0) - (-3)((-4) \times (-22) - (0 \times 0)) + 20((-4) \times (-2) - 0 \times 9)}{5(9 \times 3 - (-2) \times (-2)) - (-3)((-4) \times 3 - 0 \times (-2)) + 0(-4 \times (-2) - 0 \times (9))}$$

$$= \frac{5(-198-0)+3(88-0)+20(8-0)}{5(27-4)+3(-12+0)+0}$$

$$= \frac{5(-198)+3(88)+20(8)}{5(23)+3(-12)}$$

$$= \frac{-990+264+160}{115-36}$$

$$= \frac{-566}{79}$$

$$I_3 = -7.16 \text{ A}$$

∴ คำตอบของระบบสมการนี้คือ $I_1 = 4.15 \text{ A}$, $I_2 = 4.43 \text{ A}$ และ $I_3 = -7.16 \text{ A}$ **ตอบ**
