

แผนการจัดการเรียนรู้

ชีววิทยา คณิตศาสตร์ช่างโยธา

รหัสวิชา 20121-1001 ท-ป-น 2-0-2

หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2562

โดย

เอกชัย รัตนโน

จัดทำโดย



บริษัท ซีเอดยูเคชั่น จำกัด (มหาชน)
SE-EDUCATION PUBLIC COMPANY LIMITED

คำนำ

แผนการจัดการเรียนรู้ฉบับนี้จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการจัดการเรียนการสอนในรายวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา (ท-ป-น) 2-0-2 รหัสวิชา 20121-1001 หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2562 ของสำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา ผู้จัดทำได้ใช้กระบวนการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียน เป็นสำคัญ โดยให้ผู้เรียนได้มีส่วนร่วมในการจัดการเรียนรู้ การแก้ปัญหา การจัดกระบวนการ รวมทั้งการ ประเมินตามสภาพจริง ทั้งนี้เพื่อให้ผู้เรียนเกิดประสบการณ์ในการเรียนรู้ ที่สามารถนำความรู้และทักษะไปใช้ใน ชีวิตประจำวันและการทำงาน นอกจากนี้ในแผนการจัดการเรียนรู้ฉบับนี้ยังมีการสอดแทรกความรู้ควบคู่ คุณธรรม โดยส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์ เช่น ความคิด ริเริ่มสร้างสรรค์ ความซื่อสัตย์สุจริต การมีส่วนร่วมในชั้นเรียน ความสามัคคีและความเป็นประชาธิปไตย ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่า แผนการจัดการเรียนรู้ฉบับนี้จะมีประโยชน์ต่อนักเรียนนักศึกษา อย่างสูงสุดในการ เรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ช่วงโยธา

เอกชัย รัตนโน

สารบัญ

	หน้า
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1	1
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2	13
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3	21
หน่วยการเรียนรู้ที่ 4	32
หน่วยการเรียนรู้ที่ 5	44
หน่วยการเรียนรู้ที่ 6	52
หน่วยการเรียนรู้ที่ 7	61
หน่วยการเรียนรู้ที่ 8	71
หน่วยการเรียนรู้ที่ 9	81

	ลักษณะรายวิชา
	รหัสวิชา 20121-1001 ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา ท-ป-น 2-0-2
	หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ ประเภทวิชาอุตสาหกรรม
จุดประสงค์รายวิชา เพื่อให้ 1. มีความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการตรีโกณมิติ เลขยกกำลัง ลอการิทึมและกราฟ 2. มีความสามารถในการนำหลักการตรีโกณมิติ เลขยกกำลัง ลอการิทึม และกราฟมาประยุกต์ใช้กับงานโยธา 3. มีกิจนิสัยในการทำงานด้วยความรอบคอบและถูกต้อง สมรรถนะรายวิชา 1. แสดงความรู้เกี่ยวกับหลักการของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และคณิตศาสตร์สำหรับงานโยธา 2. แสดงความรู้เกี่ยวกับหลักการและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ใช้ในงานโยธา 3. ประยุกต์ใช้กระบวนการของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สมการและหลักการทางคณิตศาสตร์หาค่าตัวแปร คำอธิบายรายวิชา ศึกษาเกี่ยวกับหลักการของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมต่าง ๆ การใช้ตารางหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ กฎของไซน์ โคไซน์ สมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร สองตัวแปร สมการกำลังสอง ดีเทอร์มิแนนต์ เลขยกกำลัง กฎของเลขยกกำลัง การบวก ลบ คูณ หารเลขยกกำลัง รากหรือกรณฑ์ การใช้ตารางหากรณฑ์ที่สองและที่สาม ลอการิทึม ลอการิทึมสามัญ การหาค่าโดยใช้ลอการิทึม สมการเลขชี้กำลัง และสมการลอการิทึม กราฟ การเขียนกราฟจากสมการ การแปลความหมายของกราฟ การหาพื้นที่รูปทรงต่าง ๆ การแบ่งเส้นตรงเป็นหลายส่วนเท่า ๆ กัน การสร้างรูปหลายเหลี่ยมชนิดต่าง ๆ	

	วิเคราะห์หัวข้อเรื่อง		
	รหัสวิชา 20121-1001	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่างโยธา	ท-ป-น 2-0-2
	หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ ประเภทวิชาอุตสาหกรรม		

การวิเคราะห์หัวข้อเรื่อง แบบแผนภูมิลำดับ (Scalar Pattern) หรือ แบบแผนภูมิปะการัง (Coral Pattern)

```
graph TD; A[คณิตศาสตร์ช่างโยธา] --> B[สมการเชิงเส้นสองตัวแปร  
และสมการกำลังสอง]; A --> C[สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว]; A --> D[ฟังก์ชันตรีโกณมิติ]; A --> E[เรขาคณิต พื้นที่และปริมาตร]; A --> F[กราฟ]; A --> G[ฟังก์ชันลอการิทึม]; A --> H[ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง]; A --> I[พื้นฐานเลขยกกำลัง  
รากและกรณฑ์]; A --> J[ทฤษฎีของเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์];
```

	วิเคราะห์หัวข้อเรื่อง				
	รหัสวิชา 20121-1001 ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่างโยธา ท-ป-น 2-0-2				
	หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ ประเภทวิชาอุตสาหกรรม				
หัวข้อหลัก(Main Element) / หน่วยการเรียนรู้ (Learning Unit)	แหล่งข้อมูล				
	A	B	C	D	E
1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	✓			✓	✓
2. สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	✓			✓	✓
3. สมการเชิงเส้นสองตัวแปรและสมการกำลังสอง	✓			✓	✓
4. ทฤษฎีของเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์	✓			✓	✓
5. พื้นฐานเลขยกกำลัง รากและกรณฑ์	✓			✓	✓
6. ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง	✓			✓	✓
7. ฟังก์ชันลอการิทึม	✓			✓	✓
8. กราฟ	✓			✓	✓
9. เรขาคณิต พื้นที่และปริมาตร	✓			✓	✓

หมายเหตุ

A : คำอธิบายรายวิชา

B : ผู้เชี่ยวชาญ

C : ผู้ชำนาญงาน

D : ประสบการณ์ของครูผู้สอน

E : เอกสาร/ตำรา/คู่มือ

	รายละเอียดหัวข้อเรื่อง	
	รหัสวิชา 20121-1001 ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา ท-ป-น 2-0-2	
	หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ ประเภทวิชาอุตสาหกรรม	
หัวข้อหลัก (Main Element) / หน่วยการเรียนรู้ (Learning Unit)	หัวข้อย่อย (Element)	
1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	1.1 ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์	
	1.2 มุม	
	1.3 ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ในจุดภาค	
	1.4 ตรีโกณมิติของสามเหลี่ยม	
	1.5 กรณิพิเศษของสามเหลี่ยม	
	1.6 เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติ	
	1.7 ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ	
	1.8 กฎของไซน์และโคไซน์	
	1.9 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	
2. สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	2.1 สมการ	
	2.2 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	
	2.3 การแก้สมการ	
3. สมการเชิงเส้นสองตัวแปรและสมการ กำลังสอง	3.1 ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร	
	3.2 การหาคำตอบระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยใช้กราฟ	
	3.3 การหาคำตอบระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยวิธีทางพีชคณิต การแทนค่า	
	3.4 การหาคำตอบระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยวิธีทางพีชคณิต การกำจัดตัวแปร	
	3.5 สมการกำลังสอง	
	3.6 การแก้สมการกำลังสองโดยวิธีแยกตัวประกอบ	
	3.7 การแก้สมการกำลังสองโดยทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์	
	3.8 การแก้สมการกำลังสองโดยใช้สูตร	
4. ทฤษฎีของเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์	4.1 เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์	
	4.2 การบวก ลบและการคูณสเกลาร์กับเมทริกซ์	
	4.3 การคูณกันระหว่างเมทริกซ์กับเมทริกซ์	
	4.4 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์	
	4.5 อินเวอร์สของเมทริกซ์	
	4.6 การแก้ปัญหาของสมการเชิงเส้นโดยเมทริกซ์	
	4.7 การแก้ปัญหาของสมการเชิงเส้นโดยดีเทอร์มิแนนต์	

	รายละเอียดหัวข้อเรื่อง	
	รหัสวิชา 20121-1001 ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา ท-ป-น 2-0-2	
	หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ ประเภทวิชาอุตสาหกรรม	
หัวข้อหลัก (Main Element) / หน่วยการเรียนรู้ (Learning Unit)	หัวข้อย่อย (Element)	
5. พื้นฐานเลขยกกำลัง รากและกรณฑ์	5.1 พื้นฐานเลขยกกำลัง	
	5.2 เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเศษส่วน	
	5.3 พื้นฐานรากที่ 2 ของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปของกรณฑ์	
	5.4 การคูณและการหารจำนวนเต็มโดยเลขยกกำลังฐาน 10	
6. ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง	6.1 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง	
	6.2 เลขชี้กำลังที่อยู่ในรูปของตัวแปร	
	6.3 การดำเนินการของเลขชี้กำลัง	
	6.4 สมการเลขชี้กำลัง	
	6.5 การแยกตัวประกอบของพหุนาม	
	6.6 รากที่ n ที่อยู่ในรูปของกรณฑ์	
	6.7 การดำเนินการรากที่ n ที่อยู่ในรูปของกรณฑ์	
7. ฟังก์ชันลอการิทึม	7.1 ฟังก์ชันลอการิทึม	
	7.2 การดำเนินการของลอการิทึม	
	7.3 กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม	
	7.4 ลอการิทึมสามัญ	
	7.5 ค่าลอการิทึมสามัญจากตาราง	
	7.6 ลอการิทึมธรรมชาติ	
	7.7 สมการลอการิทึม	
8. กราฟ	8.1 คู่อันดับ	
	8.2 กราฟในระบบพิกัดฉาก	
	8.3 กราฟจากสมการเส้นตรง	
	8.4 เส้นโค้งพาราโบลา	
9. เรขาคณิต พื้นที่และปริมาตร	9.1 เรขาคณิต	
	9.2 เครื่องมือที่ใช้ในการเขียนรูปเรขาคณิต	
	9.3 เส้นตรง	
	9.4 รูปสามเหลี่ยม	
	9.5 รูปหลายเหลี่ยม	
	9.6 รูปวงรี	
	9.7 พื้นที่รูปเรขาคณิต	
	9.8 ปริมาตรรูปเรขาคณิต	

	รายละเอียดจุดประสงค์การปฏิบัติ	
	รหัสวิชา 20121-1001 ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา ท-ป-น 2-0-2	
	หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ ประเภทวิชาอุตสาหกรรม	
หัวข้อหลัก (Main Element) / หน่วยการเรียนรู้ (Learning Unit)	จุดประสงค์การปฏิบัติ (Performance Objectives)	
1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	1. เข้าใจฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ มุม จตุภาค ค่าวนค่าได้ถูกต้อง 2. เข้าใจตรีโกณมิติของสามเหลี่ยม คำนวณหาด้านของสามเหลี่ยมได้ถูกต้อง 3. เข้าใจกรณีพิเศษและเอกลักษณ์ของตรีโกณมิติ พิสูจน์ค่าต่าง ๆ ได้ถูกต้อง 4. ใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อคำนวณค่าได้ถูกต้อง 5. เข้าใจกฎของไซน์และโคไซน์และใช้คำนวณหาค่าด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมได้ถูกต้อง 6. เข้าใจและเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ถูกต้อง 7. นำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ มุม จตุภาค ตรีโกณมิติ กรณีพิเศษและเอกลักษณ์ของตรีโกณมิติ ตารางค่าฟังก์ชัน กฎของไซน์และโคไซน์ กราฟของฟังก์ชัน ประยุกต์ใช้ในงานช่างโยธาได้อย่างถูกต้อง	
2. สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	1. รู้และเข้าใจ ความหมาย สัญลักษณ์ของสมการ 2. รู้และเข้าใจรูปของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 3. รู้และเข้าใจ สมบัติของการเท่ากัน การย้ายข้างเพื่อใช้หาคำตอบของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้อย่างถูกต้อง 4. ประยุกต์วิธีการหาคำตอบของสมการ เพื่อใช้คำนวณแก้ปัญหาทางช่างโยธาได้อย่างถูกต้อง 5. ประพฤติตนดี มีกิริยาสุภาพ เรียบร้อยและมีความขยันหมั่นเพียร	
3. สมการเชิงเส้นสองตัวแปรและสมการกำลังสอง	1. เข้าใจระบบสมการสองตัวแปรและหาคำตอบของระบบสมการได้อย่างถูกต้องโดยวิธีต่าง ๆ 2. เข้าใจสมการกำลังสองและหาคำตอบของระบบสมการกำลังสองได้อย่างถูกต้องโดยวิธีต่าง ๆ 3. มีความรู้ความเข้าใจในการสร้างระบบสมการขึ้นมาจากโจทย์ปัญหาทางด้านการคำนวณงานโยธาได้อย่างถูกต้อง และสามารถแก้สมการโดยวิธีการต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้อง	

	รายละเอียดจุดประสงค์การปฏิบัติ	
	รหัสวิชา 20121-1001	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา ท-ป-น 2-0-2
	หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ ประเภทวิชาอุตสาหกรรม	
หัวข้อหลัก (Main Element) / หน่วยการเรียนรู้ (Learning Unit)	จุดประสงค์การปฏิบัติ (Performance Objectives)	
4. ทฤษฎีของเมทริกซ์และ ดีเทอร์มิแนนต์	1. เข้าใจเกี่ยวกับเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์และสามารถ บวก ลบ และคูณ ปริมาณสเกลาร์กับเมทริกซ์ได้อย่างถูกต้อง 2. สามารถแสดงวิธีการคำนวณและหาผลลัพธ์การคูณกันระหว่างเมทริกซ์กับเมทริกซ์ได้อย่างถูกต้อง 3. สามารถแสดงวิธีการคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์และอินเวอร์สของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ได้อย่างถูกต้อง 4. สามารถสร้างสมการเชิงเส้นสองสมการสองตัวแปรจากโจทย์ปัญหาด้านงานโยธาและประยุกต์ใช้เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์เข้าแก้ปัญหาสมการเชิงเส้นได้อย่างถูกต้อง	
5. พื้นฐานเลขยกกำลัง รากและกรณฑ์	1. รู้และเข้าใจพื้นฐานของเลขยกกำลังและคำนวณหาค่าของเลขยกกำลังได้ถูกต้อง 2. ทำจำนวนจริงใด ๆ ให้อยู่ในรูปของเลขยกกำลังได้ถูกต้อง 3. รู้และเข้าใจเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นเศษส่วนหรือจำนวนตรรกยะ 4. พื้นฐานคำนวณหารากที่ n และหารากที่สองที่อยู่ในรูปของกรณฑ์ได้ถูกต้อง 5. คำนวณหาค่าจำนวนที่คูณหรือหารด้วยเลขยกกำลังฐาน 10 6. ประยุกต์ความรู้ที่ได้ในบทเรียนเพื่อใช้คำนวณหรือแก้ปัญหาทางช่างโยธาได้ถูกต้อง 7. ประพฤติตนดี มีกิริยาสุภาพ เรียบร้อยและมีความขยันหมั่นเพียร	
6. ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง	1. เข้าใจฟังก์ชันเลขชี้กำลังและนำไปแปลผลเป็นกราฟได้ถูกต้อง 2. เข้าใจเลขชี้กำลังที่อยู่ในรูปของตัวแปรใช้การดำเนินการของเลขชี้กำลังแก้ปัญหาได้ถูกต้อง 3. แก้ปัญหาสมการเลขชี้กำลังได้ แยกตัวประกอบของพหุนามเพื่อนำมาใช้แก้สมการได้ถูกต้อง	

	รายละเอียดจุดประสงค์การปฏิบัติ	
	รหัสวิชา 20121-1001 ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา ท-ป-น 2-0-2	
	หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ ประเภทวิชาอุตสาหกรรม	
หัวข้อหลัก (Main Element) / หน่วยการเรียนรู้ (Learning Unit)	จุดประสงค์การปฏิบัติ (Performance Objectives)	
6. ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (ต่อ)	4. หารากที่ 2 และรากที่ n ของจำนวนที่อยู่ในรูปของกรณฑ์ได้ถูกต้อง 5. ใช้หลักการดำเนินการของกรณฑ์ เพื่อนำมาแก้ปัญหาได้ถูกต้อง 6. นำความรู้เกี่ยวกับสมการเลขชี้กำลัง การหารากของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์ ใช้ในงานช่าง	
7. ฟังก์ชันลอการิทึม	1. เข้าใจฟังก์ชันลอการิทึมและเขียนกราฟของฟังก์ชันได้ถูกต้อง 2. เข้าใจการดำเนินการของฟังก์ชันและนำไปใช้ในการคำนวณเกี่ยวกับลอการิทึมได้ถูกต้อง 3. คำนวณหาค่าลอการิทึมสามัญ และใช้ตารางในการหาค่าได้ถูกต้อง 4. คำนวณหาค่าลอการิทึมธรรมชาติได้ถูกต้อง 5. คำนวณหาค่าตัวแปรของสมการลอการิทึมได้ถูกต้อง 6. นำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันลอการิทึม กราฟ ลอการิทึมสามัญ ลอการิทึมธรรมชาติและแก้สมการลอการิทึมประยุกต์ใช้ในงานช่างโยธาได้อย่างถูกต้อง	
8. กราฟ	1. เข้าใจ ความหมาย สัญลักษณ์ ของคู่อันดับ 2. แปลผลจากความสัมพันธ์ต่าง ๆ ให้เป็นข้อมูลคู่อันดับได้อย่างถูกต้องตามหลักวิทยาศาสตร์ 3. นำข้อมูลจากคู่อันดับไปเขียนกราฟลงบนพิกัดฉาก และแปลความหมายจากกราฟได้ 4. ประยุกต์การแปลผลความสัมพันธ์ให้เป็นคู่อันดับแล้วมาเขียนกราฟลงบนพิกัดฉาก เพื่อใช้ในงานช่างโยธาได้อย่างถูกต้อง	
9. เรขาคณิต พื้นที่และปริมาตร	1. ใช้เครื่องมือเขียนแบบพื้นฐานเพื่อสร้างรูปเรขาคณิต 2 มิติ แบบต่าง ๆ ได้ 2. คำนวณหาพื้นที่ของรูปเรขาคณิต 2 มิติได้ 3. คำนวณหาพื้นผิวและปริมาตรของรูปเรขาคณิต 3 มิติได้ 4. นำความรู้ เกี่ยวกับการสร้างรูปเรขาคณิตและหาพื้นที่ พื้นผิว ปริมาตรรูปเรขาคณิต 2 มิติ และ 3 มิติ มาประยุกต์ใช้ในงานโยธาได้	

	กำหนดการเรียนรู้		
	รหัสวิชา 20121-1001 ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา ท-ป-น 2-0-2		
	หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ ประเภทวิชาอุตสาหกรรม		
หน่วยที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	สัปดาห์ที่	ชั่วโมง
1	ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	1-2	4
2	สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	3-4	4
3	สมการเชิงเส้นสองตัวแปรและสมการกำลังสอง	5-6	4
4	ทฤษฎีของเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์	7-8	4
5	พื้นฐานเลขยกกำลัง รากและกรณฑ์	9-10	4
6	ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง	11-12	4
7	ฟังก์ชันลอการิทึม	13-14	4
8	กราฟ	15-16	4
9	เรขาคณิต พื้นที่และปริมาตร	17-18	4
รวม		18	36

	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1	หน่วยที่ 1
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา	เวลาเรียนรวม 36 ชม.
	ชื่อหน่วย บทที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	สอนครั้งที่ 1-2/18
ชื่อเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ		จำนวน 4 คาบ

1. สารสำคัญ

ฟังก์ชันไซน์ (Sine Function) และฟังก์ชันโคไซน์ (Cosine Function) จะนิยามได้จากทฤษฎีของวงกลมหนึ่งหน่วย (The Unit Circle) $y = \sin \theta$ และ $x = \cos \theta$

มุม (Angles) จะวัดได้ทั้งหน่วยของ องศา (Degrees) และเรเดียน (Radians) โดยที่ $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad}$
และ $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$

สามเหลี่ยมมุมฉาก (Right-angles Triangles) ซึ่งมุมภายใน 3 มุม จะมีมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก อัตราส่วนตรีโกณมิติของสามเหลี่ยมมุมฉากคือ $\sin \theta = \text{ข้าม/ฉาก}$; $\cos \theta = \text{ชิด/ฉาก}$; $\tan \theta = \text{ข้าม/ชิด}$

สามเหลี่ยมมุมฉากเมื่อใช้คุณสมบัติตามทฤษฎีบท พิทาโกรัส $c^2 = a^2 + b^2$

ความสัมพันธ์ กฎของไซน์ จะได้ว่า $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

ความสัมพันธ์ กฎของโคไซน์ จะได้ว่า $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะแบ่งแกน x ออกเป็นช่วงย่อยในหนึ่งช่วงจะเรียกว่า คาบ (Period) ซึ่งในคาบหนึ่งจะมีค่าเท่ากับค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของแกน y หรือเรียกว่า แอมพลิจูด (Amplitude)

2. สารการเรียนรู้

1. ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ (Sine Function and Cosine Function)
2. มุม (Angle)
3. ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ในจุดภาค (Sine and Cosine Function in Quadrant)
4. ตรีโกณมิติของสามเหลี่ยม (Trigonometry of Triangles)
5. กรณีพิเศษของสามเหลี่ยม (Special Cases of Triangles)
6. เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติ (Trigonometric Identities)
7. ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Function Value Table)
8. กฎของไซน์และโคไซน์ (Sine and Cosine Rules)
9. กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Graph of Trigonometric Functions)

3. จุดประสงค์การเรียนรู้

จุดประสงค์ทั่วไป

เพื่อให้มีความเข้าใจฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ มุม จตุภาค ตรีโกณมิติของสามเหลี่ยม กรณิ พิเศษและเอกลักษณ์ของตรีโกณมิติ ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ กฎของไซน์และโคไซน์ กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ประยุกต์ความรู้ที่ได้นำไปใช้ในงานช่างโยธาได้

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

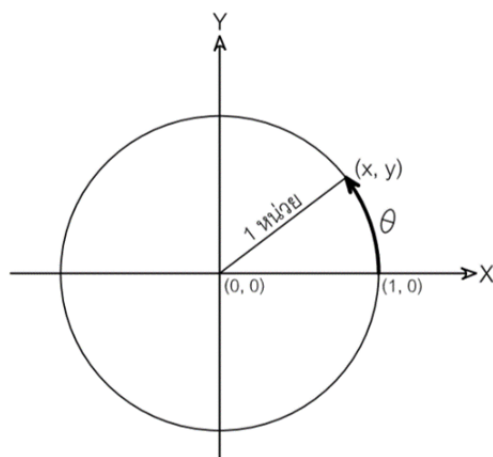
1. เข้าใจฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ มุม จตุภาค คำนวณค่าได้ถูกต้อง
2. เข้าใจตรีโกณมิติของสามเหลี่ยม คำนวณหาด้านของสามเหลี่ยมได้ถูกต้อง
3. เข้าใจกรณีพิเศษและเอกลักษณ์ของตรีโกณมิติ พิสูจน์ค่าต่าง ๆ ได้ถูกต้อง
4. ใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อคำนวณหาค่าได้ถูกต้อง
5. เข้าใจกฎของไซน์และโคไซน์และใช้คำนวณหาค่าด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมได้ถูกต้อง
6. เข้าใจและเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ถูกต้อง
7. นำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ มุม จตุภาค ตรีโกณมิติ กรณีพิเศษและเอกลักษณ์ของตรีโกณมิติ ตารางค่าฟังก์ชัน กฎของไซน์และโคไซน์ กราฟของฟังก์ชัน ประยุกต์ใช้ในงานช่างโยธาได้อย่างถูกต้อง

4. สารการเรียนรู้

4.1 ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ (Sine Function and Cosine Function)

ฟังก์ชันไซน์ (Sine Function) และฟังก์ชันโคไซน์ (Cosine Function) จะนิยามได้จาก ทฤษฎีของวงกลมหนึ่งหน่วย

พิจารณารูปที่ 1.1 วงกลมหนึ่งหน่วย (The Unit Circle) คือวงกลมที่มีรัศมียาว 1 หน่วย วางตัวอยู่บนระนาบพิกัดแบบคาร์ทีเซียน (Cartesian) จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่พิกัดโค-ออร์ดิเนต (Co-ordinates) (x, y) ที่ $(0, 0)$



รูปที่ 1.1

จากพิกัด $(1, 0)$ วัดส่วนโค้งไปตามทิศทางทวนเข็มนาฬิกาที่พิกัดใดๆ ให้เป็นพิกัด (x, y) ความยาวของส่วนโค้งที่ได้จะเท่ากับ θ โดยที่ $\theta \geq 0$

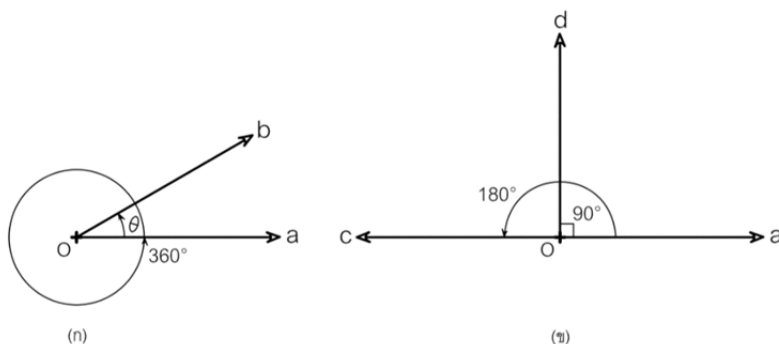
จากนั้นเราสามารถนิยามฟังก์ชันได้ดังนี้

ฟังก์ชันไซน์ (Sine Function) เขียนอยู่ในรูป $y = \sin \theta$

ฟังก์ชันโคไซน์ (Cosine Function) เขียนอยู่ในรูป $x = \cos \theta$

4.2 มุม (Angle)

พิจารณารูปที่ 1.4(ก) เส้นตรง oa ซึ่งเราจะเรียกว่า ด้านเริ่มต้นของมุม (Initial side) ถ้าเราหมุนเส้นตรง oa ขึ้นไปตามทิศทางทวนเข็มนาฬิกาไปหยุดที่แนวเส้นตรง ob จะเกิดมุม θ แนวเส้นตรง ob นี้จะเรียกว่าด้านสิ้นสุดของมุม (Terminal side) จุด o จะเรียกว่าจุดยอดมุม (Vertex) หน่วยการวัดมุมจะวัดได้ทั้งหน่วยของ องศา (Degrees) และเรเดียน (Radians)



รูปที่ 1.4

ถ้าเราหมุนเส้นตรง oa ตามทิศทางทวนเข็มนาฬิกาต่อไปอีกจนไปบรรจบอยู่ในตำแหน่งเดิมของเส้นตรง oa ถือเป็นหนึ่งรอบ ถ้าเราวัดค่ามุมในหน่วยองศา จะได้ค่ามุม 360 องศา หรือใช้สัญลักษณ์กำกับ "°" จะเขียนได้ว่า มุม 360° พิจารณารูปที่ 1.4(ข) ถ้าเราหมุนเส้นตรง oa ตามทิศทางทวนเข็มนาฬิกาหยุดที่แนวเส้นตรง oc ถือเป็นครึ่งรอบ ค่ามุมที่ได้จะเป็นครึ่งหนึ่งคือ $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$

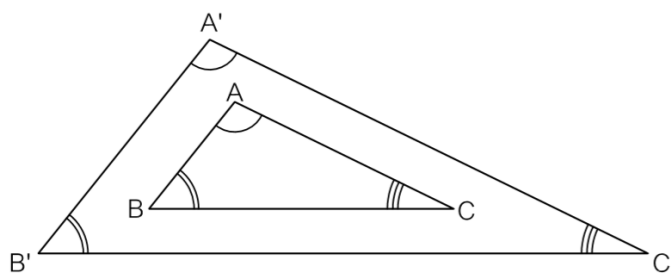
4.3 ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ในจตุภาค (Sine and Cosine Function in Quadrant)

วงกลมหนึ่งหน่วย (The Unit Circle) วางตัวอยู่บนระนาบพิกัดแบบคาร์ทีเซียน (Cartesian) เมื่อเราตั้งแกน x (แกนนอน) และแกน y (แกนตั้ง) ที่จุดโค-ออร์ดิเนต (Co-ordinates) (x, y) ที่ $(0, 0)$ ตรงตำแหน่งจุดศูนย์กลางของวงกลม จะพบว่าวงกลมหนึ่งหน่วยจะถูกแบ่งออกเป็นสี่ส่วน เรียกว่า จตุภาค (Quadrant)

4.4 ตรีโกณมิติของสามเหลี่ยม (Trigonometry of Triangles)

4.4.1 สามเหลี่ยม (Triangles)

สามเหลี่ยม (Triangles) จะประกอบขึ้นด้วยรูปร่างและขนาด โดยรูปร่างของสามเหลี่ยมจะถูกควบคุมด้วยมุมสามมุม และขนาดจะถูกควบคุมโดยความยาวด้านสามด้าน พิจารณารูปที่ 1.9 รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีรูปร่างเท่ากัน นั่นหมายถึงค่ามุมเท่ากัน แต่ขนาดจะไม่เท่ากัน นั่นหมายถึงความยาวด้านไม่เท่ากัน กรณีนี้จะได้ค่าความสัมพันธ์ระหว่างด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองดังนี้



รูปที่ 1.9

รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีรูปร่างเท่ากัน นั่นคือ มุม $A' = A$, มุม $B' = B$ และ มุม $C' = C$

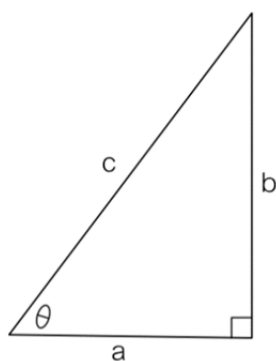
ตามกฎของรูปสามเหลี่ยม มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันจะต้องได้ 180°

ดังนั้น มุม $A' + B' + C' = 180^\circ$ และ มุม $A + B + C = 180^\circ$

และจะได้ความสัมพันธ์ของความยาวด้าน

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

4.4.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติ (Trigonometry ratio)



รูปที่ 1.10

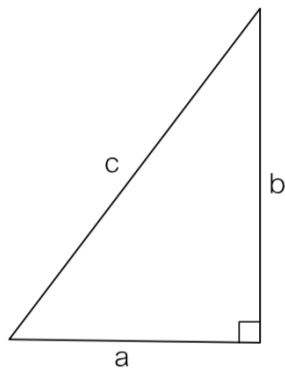
พิจารณารูปที่ 1.10 สามเหลี่ยมมุมฉาก (Right-angles Triangles) ABC ซึ่งมุมภายใน 3 มุม จะมีมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก โดยจากรูปคือ มุม C ที่จุดยอดมุม B จะมีค่ามุม θ สำหรับด้านทั้งสามจะมีชื่อเรียกดังนี้

ด้าน b คือด้านตรงข้ามมุม θ (Opposite)

ด้าน a คือด้านประชิดมุม θ (Adjacent)

ด้าน c คือด้านตรงข้ามมุมฉาก (Hypotenuse)

4.4.3 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส (Pythagoras' theorem)



รูปที่ 1.11

พิจารณารูปที่ 1.11 สามเหลี่ยมมุมฉาก (Right-angles Triangles) มีคุณสมบัติตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส (Pythagoras' theorem) คือ “ด้านตรงข้ามมุมฉากยกกำลังสอง ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะเท่ากับผลรวมของสองด้านยกกำลังสอง” หรือ $c^2 = a^2 + b^2$

4.5 กรณีพิเศษของสามเหลี่ยม (Special Case of Triangles)

กรณีที่ 1 สามเหลี่ยมมุมฉาก มีอัตราส่วนด้าน	$1 : 1 : \sqrt{2}$
พิสูจน์ ตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส	$c^2 = a^2 + b^2$
	$c^2 = 1^2 + 1^2$
	$c = \sqrt{2}$

กรณีที่ 2 สามเหลี่ยมหน้าจั่ว แสดงดังรูป 1.13(ก) มีความสัมพันธ์ของอัตราส่วนด้าน
 $2 : 2 : 2$

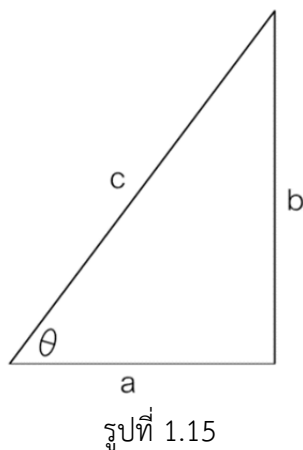
สำหรับผลรวมของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ ถ้าเราแบ่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วออกเป็นสองตามสมมาตร รูปที่ได้จะแบ่งออกเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

4.6 เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติ (Trigonometric Identities)

เอกลักษณ์พื้นฐานของตรีโกณมิติ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส สามารถพิสูจน์ได้ดังนี้โดยพิจารณารูปที่ 1.15 ประกอบ

$$c^2 = a^2 + b^2$$

นำ c^2 หารตลอด $\frac{c^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$ หรือ $1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$



4.7 ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Function Value Table)

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Function Value Table) จะแสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาด 0° ถึง 90° ซึ่งจะแสดงเฉพาะค่าฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันแทนเจนต์ สำหรับฟังก์ชันส่วนกลับก็จะใช้ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งสามฟังก์ชันดังกล่าวหาค่าได้

4.8 กฎของไซน์และโคไซน์ (Sine and Cosine Rules)

การคำนวณตรีโกณมิติเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมใด ๆ สามารถคำนวณหาความยาวของด้านหรือมุมที่เราไม่รู้ค่าของรูปสามเหลี่ยมได้ จากที่ได้อธิบายมาข้างต้นถึงอัตราส่วนตรีโกณมิติและทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะใช้ในการคำนวณเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (Right Triangles)

4.9 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Graph of Trigonometric Functions)

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Graph of Trigonometric Functions) คือกราฟที่วางตัวอยู่บนพิกัดแกน x และ y โดยรูปกราฟจะแบ่งแกน x ออกเป็นช่วงย่อย (Subinterval) ในหนึ่งช่วงจะเรียกว่า คาบ (Period) ซึ่งในคาบหนึ่งจะมีค่าเท่ากับค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของแกน y หรือเรียกว่า แอมพลิจูด (Amplitude)

ตัวอย่างที่ 1.1 จงใช้ตารางที่ 1.1 หาค่าของ $3\sin^2 \frac{\pi}{2} - 2\cos^2 \pi + \sin^2 \frac{\pi}{2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 3\sin^2 \frac{\pi}{2} - 2\cos^2 \pi + \sin^2 \frac{\pi}{2} &= 3(2)^2 - 2(-1)^2 + 1^2 \\ &= 3 - 2 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

ตอบ

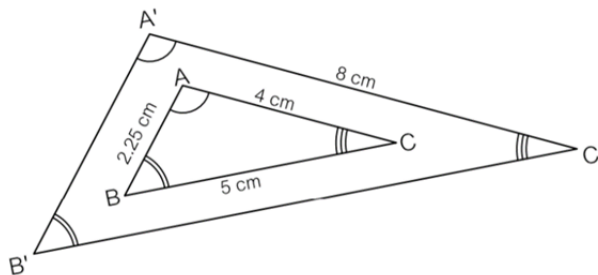
ตัวอย่างที่ 1.2 จงใช้ตารางที่ 1.1 หาค่าของ $5 \cos^2 2\pi + 3 \cos \pi - \sin 2\pi$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 5 \cos^2 2\pi + 3 \cos \pi - \sin 2\pi &= 5(1)^2 + 3(-1) + 0 \\ &= 5 - 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.7 จากรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มีรูปร่างเท่ากัน จงคำนวณหาความยาวด้าน $A'B'$



รูปที่ 1.25

วิธีทำ

จากความสัมพันธ์ของด้าน

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

แทนค่า

$$\frac{2.25 \text{ cm}}{A'B'} = \frac{4 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = \frac{5 \text{ cm}}{B'C'}$$

แยกคิดทีละคู่ความสัมพันธ์

$$\frac{2.25 \text{ cm}}{A'B'} = \frac{4 \text{ cm}}{8 \text{ cm}}$$

$$A'B' = \frac{2.25 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} \times 8 \text{ cm}$$

ความยาวด้าน

$$A'B' = 4.5 \text{ cm}$$

ตอบ

$$\frac{4 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = \frac{5 \text{ cm}}{B'C'}$$

$$B'C' = \frac{5 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} \times 8 \text{ cm}$$

ความยาวด้าน

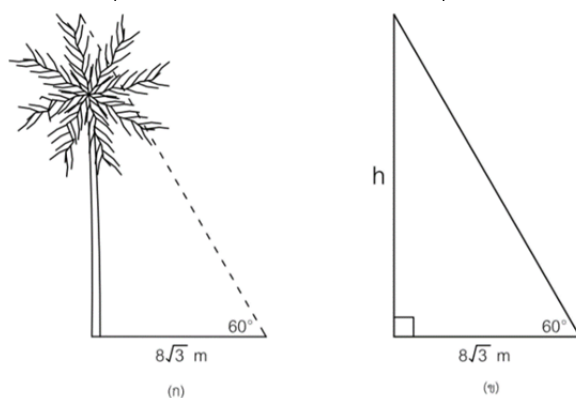
$$B'C' = 10 \text{ cm}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.8 ต้นไม้มีเงาเป็นแนวราบยาวเท่ากับ $8\sqrt{3}$ m แนวเส้นประจากตำแหน่งยอดสุดของความสูงต้นไม้มาถึงจุดปลายของแนวเส้นเงาทำมุมกับแนวราบ 60° อยากทราบว่าต้นไม้นี้มีความสูงเท่าใด

วิธีทำ

จากรูปที่ 1.26(ก) เป็นรูปที่โจทย์กำหนดขึ้นมา นำมาเขียนเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ดังรูปที่ 1.26 (ข) ซึ่งจะพบว่าโจทย์ต้องการทราบความสูงของต้นไม้หรือ ความยาวด้านตรงข้ามมุม θ และโจทย์กำหนดความยาวของเงาหรือความยาวด้านประชิดมุม θ ดังนั้นใช้ แทนเจนต์ของมุม θ หาค่าความสูงของต้นไม้



รูปที่ 1.26

แทนเจนต์ของมุม 60° หาได้จาก

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{8\sqrt{3} \text{ m}}$$

จากตารางที่ 1.3

$$\sqrt{3} = \frac{h}{8\sqrt{3} \text{ m}}$$

$$h = \sqrt{3} \times 8\sqrt{3} \text{ m}$$

$$h = \sqrt{3 \times 3} \times 8 \text{ m}$$

$$h = 3 \times 8 \text{ m}$$

ความสูงของต้นไม้

$$h = 24 \text{ m}$$

ตอบ

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูอธิบายเกี่ยวกับสาระสำคัญและจุดประสงค์การเรียนรู้
2. นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนหน่วยการเรียนรู้ที่ 1

ขั้นสอน

3. ครูอธิบายเนื้อหาและให้ความรู้ ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
4. นักเรียนทำแบบทดสอบหน่วยที่ 1 ในหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ช่างโยธา

ขั้นสรุปและการประยุกต์

5. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบประเมินผลการเรียนรู้บทที่ 1 พร้อมกับสรุปบทเรียนร่วมกัน

6. สื่อการเรียนรู้

เอกชัย รัตนโน. คณิตศาสตร์ช่างโยธา (Mathematics for Civil Work) รหัสวิชา 20121-1001, พิมพ์และจัดจำหน่ายโดย บริษัท ซีเอ็ดดูเคชั่น จำกัด (มหาชน), พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2565

7. การวัดผลประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 1
3. สังเกตและประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 1
2. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยอาจารย์และนักศึกษา ร่วมกันประเมิน

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล เกณฑ์ผ่าน ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 1 เกณฑ์ผ่าน ทำถูกต้อง 60% ขึ้นไป
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับ การประเมินตามสภาพจริง

8. กิจกรรมเสนอแนะ/งานที่มอบหมาย

8.1 กิจกรรมเสนอแนะ

- 8.1.1 ให้นักศึกษาค้นคว้าหาข้อมูลเพิ่มเติม นอกเหนือจากเนื้อหาบทเรียนที่เรียนมาทางอินเทอร์เน็ต
- 8.1.2 ให้นักศึกษาสังเกตสิ่งรอบตัว ทั้งในวิทยาลัยฯ และภายนอก ว่ามีสิ่งใดบ้างที่สัมพันธ์กับเนื้อหาบทเรียนที่เรียนมา

8.2 งานที่มอบหมาย

ทำในหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ช่วงก่อสร้าง บทที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- 8.2.1 แบบทดสอบก่อนเรียนบทที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- 8.2.2 แบบประเมินผลการเรียนรู้บทที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- 8.2.3 แบบทดสอบหลังเรียนบทที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

9. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

1. ผลการใช้แผนการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

2. ผลการเรียนรู้ของนักเรียน/ผลการสอนของครู/ปัญหาที่พบ

.....

.....

.....

.....

.....

3. แนวทางการแก้ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ตัวแทนนักเรียน

ลงชื่อ.....

(.....)

ครูผู้สอน

การประเมินผล บทที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

คำชี้แจง : คะแนนรวมต่อบท 100 คะแนนเต็ม

1. แบบฝึกหัด จำนวน 10 ข้อ ข้อละ คะแนน รวม คะแนน
2. แบบประเมินผลก่อนและหลังการเรียนรู้ จำนวน 10 ข้อ ข้อละ คะแนน รวม คะแนน
3. ประเมินจิตพิสัยตามสภาพจริง 20 คะแนน

แบบวัดผล บทที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Function)						
ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา รหัสวิชา 20121-1001				วิทยาลัย		
ชื่อ-สกุล..... ระดับ.....				ครู		
ที่	รายการประเมิน	คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน		คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน		คะแนนแบบฝึกหัด
		คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	
1	ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์					
2	มุม					
3	ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ในจตุภาค					
4	ตรีโกณมิติของสามเหลี่ยม					
5	กรณีพิเศษของสามเหลี่ยม					
6	เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติ					
7	ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ					
8	กฎของไซน์และโคไซน์					
9	กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ					
10						
11						
12						
รวมคะแนนด้านทักษะ		10		10		60
13	ความขยันหมั่นเพียร ความวิริยะอุตสาหะ					10
14	ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์สุจริต					10
รวมคะแนนทั้งหมด				100		รวม

	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2	หน่วยที่ 2
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา	เวลาเรียนรวม 36 ชม.
	ชื่อหน่วย บทที่ 2 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	สอนครั้งที่ 3-4/18
ชื่อเรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว		จำนวน 4 คาบ

1. สาระสำคัญ

สมการคือ ข้อความหรือประโยคที่แสดงความสัมพันธ์กันระหว่างจำนวนด้วยเครื่องหมายเท่ากับ
 “ = “ สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว จะเขียนอยู่ในรูปของ $ax + c = 0$

การแก้สมการ หมายถึง การหาค่าจำนวนใด ๆ ที่แทนตัวแปรในสมการแล้วทำให้สมการนั้นเป็นจริง โดยจะใช้สมบัติของการเท่ากันในการหาคำตอบ มี 4 ข้อ

1. สมบัติของการบวก
2. สมบัติของการลบ
3. สมบัติของการคูณ
4. สมบัติของการหาร

2. สาระการเรียนรู้

1. สมการ
2. สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
3. การแก้สมการ

3. จุดประสงค์การเรียนรู้

จุดประสงค์ทั่วไป

เพื่อให้มีความเข้าใจเกี่ยวกับสมการ รูปของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว สามารถหาคำตอบของสมการได้ โดยใช้สมบัติของการเท่ากัน การย้ายข้าง ประยุกต์ความรู้สามารถคำนวณแก้ปัญหางานทางช่างโยธาได้

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. รู้และเข้าใจ ความหมาย สัญลักษณ์ ของสมการ
2. รู้และเข้าใจรูปของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
3. รู้และเข้าใจ สมบัติของการเท่ากัน การย้ายข้างเพื่อใช้หาคำตอบของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้อย่างถูกต้อง
4. ประยุกต์วิธีการหาคำตอบของสมการ เพื่อใช้คำนวณแก้ปัญหางานทางช่างโยธาได้อย่างถูกต้อง
5. ประพฤติตนดี มีกิริยาสุภาพ เรียบร้อยและมีความขยันหมั่นเพียร

4. สารการเรียนรู้

4.1 สมการ (Equation)

สมการคือ ข้อความหรือประโยคที่แสดงความสัมพันธ์กันระหว่างจำนวนด้วยเครื่องหมายเท่ากับ “ = ” ซึ่งในข้อความหรือประโยคนั้นจะมีตัวแปรหรือไม่ก็ได้ ยกตัวอย่างเช่น

$9 - 5$		ไม่เป็นสมการ
$10 - 4 = 6$	[a]	เป็นสมการไม่มีตัวแปร
$6x - 2 = 10$	[b]	เป็นสมการมีตัวแปร คือ x
$x - y = 25$	[c]	เป็นสมการมีตัวแปร คือ x และ y

4.2 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว (Single Variable Linear Equation)

สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว (Single Variable Linear Equation) จะเขียนอยู่ในรูปของ

$$ax + c = 0$$

โดยที่ x = ตัวแปร (variable)
 a = สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร (coefficient) แต่ต้องไม่เท่ากับศูนย์หรือ $a \neq 0$
 c = ค่าคงที่ (Constants)

สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอาจเรียกว่าสมการอันดับหนึ่ง (Degree One Equation) การหาคำตอบของสมการจะมีเพียงคำตอบเดียวเท่านั้น โดยประยุกต์ใช้สมบัติของการเท่ากันในการหาคำตอบ

4.3 การแก้สมการ (Solving of Equation)

การแก้สมการ (Solving of Equation) คือการหาคำตอบของสมการ โดยหมายถึง การหาค่าจำนวนใด ๆ ที่แทนตัวแปรในสมการแล้วทำให้สมการนั้นเป็นจริง ซึ่งโดยทั่วไปการแก้สมการจะใช้สมบัติของการเท่ากันในการหาคำตอบ มี 4 ข้อ อธิบายดังนี้

4.3.1 สมบัติของการบวก

ถ้า a , b , และ c แทนจำนวนใด ๆ ถ้า $a = b$ แล้ว จะได้ว่า $a + c = b + c$

4.3.2 สมบัติของการลบ

ถ้า a , b , และ c แทนจำนวนใด ๆ ถ้า $a = b$ แล้ว จะได้ว่า $a - c = b - c$

4.3.3 สมบัติของการคูณ

ถ้า a , b , และ c แทนจำนวนใด ๆ ถ้า $a = b$ แล้ว จะได้ว่า $a \times c = b \times c$

4.4.4 สมบัติของการหาร

ถ้า a , b , และ c แทนจำนวนใด ๆ ถ้า $a = b$ แล้ว $c \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

ตัวอย่างที่ 2.1 จงแก้สมการ $2x - 7 = 25$

วิธีทำ

โจทย์กำหนดเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เราต้องการกำจัดค่าคงที่ -7 ให้หายไปโดยใช้สมบัติของการเท่ากัน (สมบัติของการบวก)

นำ 7 มาบวกทั้งสองด้าน จะได้ว่า

$$2x - 7 + 7 = 25 + 7$$

$$2x = 32$$

$$x = \frac{32}{2}$$

$$x = 16 \quad \text{ตอบ}$$

ตรวจสอบ $2(16) - 7 = 25$ จะได้ว่า $25 = 25$ สมการเป็นจริง คำตอบถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 2.2 จงแก้สมการ $\frac{x}{5} + 13 = 24$

วิธีทำ

โจทย์กำหนดเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ต้องการกำจัดค่าคงที่ 13 ให้หายไปโดยใช้สมบัติของการเท่ากัน (สมบัติของการลบ) นำ 13 มาลบทั้งสองด้าน จะได้ว่า

$$\frac{x}{5} + 13 - 13 = 24 - 13$$

$$\frac{x}{5} = 11$$

$$x = 11 \times 5$$

$$x = 55 \quad \text{ตอบ}$$

ตรวจสอบ $\frac{55}{5} + 13 = 24$ จะได้ว่า $24 = 24$ สมการเป็นจริง คำตอบถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 2.3 จงแก้สมการ $\frac{3(4x - 2)}{4} = 27x$

วิธีทำ

โจทย์กำหนดเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว กำจัดสมประสิทธิ์หน้าวงเล็บให้หายไปโดยใช้สมบัติของการเท่ากัน (สมบัติของการคูณ) นำ $\frac{4}{3}$ มาคูณทั้งสองด้าน จะได้ว่า

$$\frac{3(4x - 2)}{4} \times \frac{4}{3} = 27x \times \frac{4}{3}$$

$$4x - 2 = \frac{27 \times 4}{3}x$$

$$4x - 2 = 36x$$

$$-32x = 2$$

$$x = -\frac{2}{32} \quad \text{หรือ} \quad x = -\frac{1}{16} \quad \text{ตอบ}$$

ตรวจสอบ $\frac{3[4(-1/16) - 2]}{4} = 27\left(-\frac{1}{16}\right)$

$$\frac{3(-36/16)}{4} = -\frac{27}{16}$$

$$-\frac{108}{16} \times \frac{1}{4} = -\frac{27}{16}$$

$$-108 = (-27 \times 4) \frac{16}{16}$$

$$-108 = -108 \quad \text{สมการเป็นจริง คำตอบถูกต้อง}$$

ตัวอย่างที่ 2.4 จงแก้สมการ $6x + 7 + 5x - 2 + 4x - 1 = 36 + 7x$

วิธีทำ

กรณีที่สมการตัวแปรเดียวมีลักษณะที่เป็นพีชคณิต มีการบวกลบกันหลายพจน์ เราต้องทำให้อยู่ในรูปของสมการตัวแปรเดียวเพื่อให้ง่ายต่อการแก้สมการ

สมการ $6x + 7 + 5x - 2 + 4x - 1 = 36 + 7x$

ย้ายด้าน $6x + 7 + 5x - 2 + 4x - 1 - 36 - 7x = 0$

รวมพจน์ $(6x + 5x + 4x - 7x) + 7 - 2 - 1 - 36 = 0$

รูปของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว $8x - 32 = 0$

แก้สมการ ย้ายด้าน $x = \frac{32}{8}$

$$x = 4$$

ตอบ

ตรวจสอบ $6(4) + 7 + 5(4) - 2 + 4(4) - 1 = 36 + 7(4)$

$$64 = 64 \quad \text{สมการเป็นจริง}$$

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูอธิบายเกี่ยวกับสาระสำคัญและจุดประสงค์การเรียนรู้
2. นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนหน่วยการเรียนรู้ที่ 2

ขั้นสอน

3. ครูอธิบายเนื้อหาและให้ความรู้ ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
4. นักเรียนทำแบบทดสอบหน่วยที่ 2 ในหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ช่างโยธา

ขั้นสรุปและการประยุกต์

5. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบประเมินผลการเรียนรู้บทที่ 2 พร้อมกับสรุปบทเรียนร่วมกัน

6. สื่อการเรียนรู้

เอกชัย รัตนโน. คณิตศาสตร์ช่างโยธา (Mathematics for Civil Work) รหัสวิชา 20121-1001, พิมพ์และจัดจำหน่ายโดย บริษัท ซีเอ็ดดูเคชั่น จำกัด (มหาชน) , พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2565

7. การวัดผลประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 2
3. สังเกตและประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 2
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยอาจารย์และนักศึกษา ร่วมกันประเมิน

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล เกณฑ์ผ่าน ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 2 เกณฑ์ผ่าน ทำถูกต้อง 60% ขึ้นไป
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับ การประเมินตามสภาพจริง

8. กิจกรรมเสนอแนะ/งานที่มอบหมาย

8.1 กิจกรรมเสนอแนะ

8.1.1 ให้นักศึกษาค้นคว้าหาข้อมูลเพิ่มเติม นอกเหนือจากเนื้อหาบทเรียนที่เรียนมาทางอินเทอร์เน็ต

8.1.2 ให้นักศึกษาสังเกตสิ่งรอบตัว ทั้งในวิทยาลัยฯ และภายนอก ว่ามีสิ่งใดบ้างที่สัมพันธ์กับเนื้อหาบทเรียนที่เรียนมา

8.2 งานที่มอบหมาย

ทำในหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ช่วงก่อสร้าง บทที่ 2 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

8.2.1 แบบทดสอบก่อนเรียนบทที่ 2 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

8.2.2 แบบประเมินผลการเรียนรู้บทที่ 2 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

8.2.3 แบบทดสอบหลังเรียนบทที่ 2 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

9. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

1. ผลการใช้แผนการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

2. ผลการเรียนรู้ของนักเรียน/ผลการสอนของครู/ปัญหาที่พบ

.....

.....

.....

.....

.....

3. แนวทางการแก้ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ตัวแทนนักเรียน

ลงชื่อ.....

(.....)

ครูผู้สอน

การประเมินผล บทที่ 2 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

คำชี้แจง : คะแนนรวมต่อบท 100 คะแนนเต็ม

1. แบบฝึกหัด จำนวน 10 ข้อ ข้อละ คะแนน รวม คะแนน
2. แบบประเมินผลก่อนและหลังการเรียนรู้ จำนวน 10 ข้อ ข้อละ คะแนน รวม คะแนน
3. ประเมินจิตพิสัยตามสภาพจริง 20 คะแนน

แบบวัดผล						
บทที่ 2 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว						
ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา รหัสวิชา 20121-1001				วิทยาลัย		
ชื่อ-สกุล..... ระดับ.....				ครู		
ที่	รายการประเมิน	คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน		คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน		คะแนนแบบฝึกหัด
		คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	
1	สมการ					
2	สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว					
3	การแก้สมการ					
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
รวมคะแนนด้านทักษะ		10		10		60
13	ความขยันหมั่นเพียร ความวิริยะอุตสาหะ					10
14	ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์สุจริต					10
รวมคะแนนทั้งหมด				100		รวม

	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3	หน่วยที่ 3
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา	เวลาเรียนรวม 36 ชม.
	ชื่อหน่วย บทที่ 3 สมการเชิงเส้นสองตัวแปรและสมการกำลังสอง	สอนครั้งที่ 5-6/18
ชื่อเรื่อง สมการเชิงเส้นสองตัวแปรและสมการกำลังสอง		จำนวน 4 คาบ

1. สาระสำคัญ

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรจะประกอบไปด้วยสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรสองตัวและมีจำนวนสมการที่จำกัดโดยบทเรียนนี้จะศึกษาที่จำนวนสองสมการ เราอาจเขียนรูปสมการได้ว่า

$$ax + by + c = 0 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$dx + ey + f = 0 \quad \dots\dots\dots[2]$$

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรค่าจำนวนใด ๆ เมื่อนำมาแทน x และ y ทั้งสองสมการแล้วทำให้สมการเป็นจริงทั้งสองสมการ และจะเขียนคำตอบของระบบสมการนี้อยู่ในรูปคู่อันดับ (x, y)

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร เป็นการหาคำตอบของระบบสมการ การหาคำตอบมีด้วยกัน 3 วิธี

สมการกำลังสอง (Quadratic Equations) เป็นสมการพหุนามที่มีตัวแปรเพียงตัวเดียว และมีเลขชี้กำลังสูงสุดเท่ากับ 2 สมการกำลังสองจะมีคำตอบเป็นจำนวนจริงไม่เกิน 2 คำตอบ การแก้สมการกำลังสองมี 3 วิธี

2. สาระการเรียนรู้

1. ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
2. การหาคำตอบระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยใช้กราฟ
3. การหาคำตอบระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยวิธีทางพีชคณิต การแทนค่า
4. สมการกำลังสอง
5. การแก้สมการกำลังสองโดยวิธีแยกตัวประกอบ
6. การแก้สมการกำลังสองโดยทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์
7. การแก้สมการกำลังสองโดยใช้สูตร

3. จุดประสงค์การเรียนรู้

จุดประสงค์ทั่วไป

เพื่อให้มีความเข้าใจเกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรและวิธีการแก้สมการ ตลอดจนสมการกำลังสองและวิธีการแก้สมการกำลังสอง นำมาประยุกต์ในคำนวณในงานช่างโยธาได้

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เข้าใจระบบสมการสองตัวแปรและหาคำตอบของระบบสมการได้อย่างถูกต้องโดยวิธีต่าง ๆ
2. เข้าใจสมการกำลังสองและหาคำตอบของระบบสมการกำลังสองได้อย่างถูกต้องโดยวิธีต่าง ๆ
3. มีความรู้ความเข้าใจในการสร้างระบบสมการขึ้นมาจากโจทย์ปัญหาทางด้านการคำนวณงานโยธาได้อย่างถูกต้องและสามารถแก้สมการโดยวิธีการต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้อง

4. สารการเรียนรู้

4.1 ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร (Two Variables System of Linear Equation)

สมการเชิงเส้นสองตัวแปร (Two Variables System of Linear Equation) จะเขียนอยู่ในรูปของ

$$ax + by + c = 0$$

โดยที่ $x, y =$ ตัวแปร (variable)

$a =$ สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร x (Coefficient- x) แต่ต้องไม่เท่ากับศูนย์หรือ $a \neq 0$

$b =$ สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร y (Coefficient- y) แต่ต้องไม่เท่ากับศูนย์หรือ $b \neq 0$

$c =$ ค่าคงที่ (Constants)

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรจะประกอบไปด้วยสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรสองตัวและมีจำนวนสมการที่จำกัดโดยบทเรียนนี้จะศึกษาที่จำนวนสองสมการ เราอาจเขียนรูปสมการได้ว่า

$$ax + by + c = 0 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$dx + ey + f = 0 \quad \dots\dots\dots[2]$$

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรค่าจำนวนใด ๆ เมื่อนำมาแทน x และ y ทั้งสองสมการแล้วทำให้สมการเป็นจริงทั้งสองสมการ และจะเขียนคำตอบของระบบสมการนี้อยู่ในรูปคู่อันดับ (x, y)

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร เป็นการหาคำตอบของระบบสมการ การหาคำตอบมีด้วยกัน 3 วิธี คือ

1. การหาคำตอบระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยใช้กราฟ
2. การหาคำตอบระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยวิธีทางพีชคณิต การแทนค่า
3. การหาคำตอบระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยวิธีทางพีชคณิต การกำจัดตัวแปร

4.2 การหาคำตอบระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยใช้กราฟ

มีขั้นตอนและวิธีการแก้สมการดังนี้

1. จากสมการทั้งสองหาจุดตัดแกน x และแกน y
2. จากจุดตัดและสมการแปลผลให้เป็นค่าคู่อันดับ
3. นำค่าจากคู่อันดับไปเขียนกราฟลงในพิกัดฉาก โดยหนึ่งสมการจะได้กราฟหนึ่งเส้น ดังนั้น

เรามีสองสมการจะได้เส้นกราฟมาสองเส้น

4. เส้นกราฟทั้งสองเส้นตัดกันที่จุดใดให้ลากเส้นตั้งฉากลงมาตัดกับแกน x จะได้คำตอบของตัวแปร x และจากจุดตัดลากเส้นแนวนอนไปตัดกับแกน y จะได้คำตอบของตัวแปร y

5. เขียนคำตอบอยู่ในรูปคู่อันดับ (x, y)

6. ตรวจสอบคำตอบโดยนำค่าตัวแปรที่ได้แทนลงสมการที่โจทย์กำหนด ถ้าคำตอบถูกต้อง สมการทั้งสองจะต้องเป็นจริง

4.3 การหาคำตอบระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยวิธีทางพีชคณิต การแทนค่า

มีขั้นตอนและวิธีการแก้สมการดังนี้

1. เลือกสมการ [1] หรือสมการ [2] มาเพียงสมการเดียว แล้วจัดรูปสมการที่เลือกให้อยู่ในรูปของตัวแปรหนึ่ง จะเป็น $x =$ หรือ $y =$ ก็ได้ โดยจะใช้ตัวเลขกำกับให้เป็นสมการใหม่ [3]
2. นำสมการ [3] แทนลงในอีกสมการหนึ่งที่ไม่ใช่สมการที่เลือกมาจัดรูป แล้วทำการแก้สมการโดยใช้สมบัติของการเท่ากัน จะได้ตัวแปรออกมาตัวหนึ่ง ซึ่งถ้าขั้นตอนที่ 1 เลือกจัดรูปให้เป็นค่าตัวแปร x ($x =$) เมื่อนำมาแทนลงในอีกสมการจะได้คำตอบเป็นค่าของตัวแปร y แต่ถ้าเลือกจัดรูปให้เป็นค่าตัวแปร y ($y =$) เมื่อนำมาแทนลงในอีกสมการจะได้คำตอบเป็นค่าของตัวแปร x
3. นำคำตอบที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 ลงไปแทนสมการที่เลือกเปลี่ยนรูปในขั้นตอน 1 จะได้คำตอบเป็นค่าอีกตัวแปรหนึ่งที่ต่างจากคำตอบที่ได้ในขั้นตอนที่ 2
4. เขียนคำตอบอยู่ในรูปคู่อันดับ (x, y)
5. ตรวจสอบคำตอบโดยนำค่าตัวแปรที่ได้แทนลงสมการที่โจทย์กำหนด ถ้าคำตอบถูกต้อง สมการทั้งสองจะต้องเป็นจริง

4.4 การหาคำตอบระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยวิธีทางพีชคณิต การกำจัดตัวแปร

มีขั้นตอนและวิธีการแก้สมการดังนี้

1. ทำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งให้มีค่าเท่ากัน โดยนำค่าคงที่คูณเข้าตลอดทั้งสมการ
2. นำสมการทั้งสองมาบวกหรือลบกันเพื่อให้ตัวแปรหนึ่งที่มีสัมประสิทธิ์ตัวหน้าเท่ากันหายไปเพื่อให้เหลือตัวแปรเดียว
3. แก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวเพื่อหาค่าของตัวแปร
4. นำค่าของตัวแปรที่ได้ ไปแทนค่าในสมการเริ่มต้นเดิมเพื่อหาค่าตัวแปรที่เหลือ
5. เขียนคำตอบอยู่ในรูปคู่อันดับ (x, y)
6. ตรวจสอบคำตอบโดยนำค่าตัวแปรที่ได้แทนลงสมการที่โจทย์กำหนด ถ้าคำตอบถูกต้อง สมการทั้งสองจะต้องเป็นจริง

4.5 สมการกำลังสอง (Quadratic Equation)

สมการกำลังสอง (Quadratic Equation) เขียนอยู่ในรูปของ

$$ax^2 + bx + c = 0$$

โดยที่ $x =$ ตัวแปร (variable)

$a =$ สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร x^2 (Coefficient- x^2) แต่ต้องไม่เท่ากับศูนย์หรือ $a \neq 0$

$b =$ สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร x (Coefficient- x)

$c =$ ค่าคงที่ (Constants)

สมการกำลังสอง (Quadratic Equation) เป็นสมการพหุนามที่มีตัวแปรเพียงตัวเดียว และมีเลขชี้กำลังสูงสุดเท่ากับ 2 สมการกำลังสองอาจเรียกว่าสมการอันดับสอง (Equation of Degree Two) เพราะค่าสูงสุดของตัวแปรในสมการคือกำลังสอง สมการกำลังสองจะมีคำตอบเป็นจำนวนจริงไม่เกิน 2 คำตอบ การแก้สมการกำลังสองมี 3 วิธี ดังนี้

1. การแก้สมการกำลังสองโดยวิธีแยกตัวประกอบ
2. การแก้สมการกำลังสองโดยทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์
3. การแก้สมการกำลังสองโดยใช้สูตร

4.6 การแก้สมการกำลังสองโดยวิธีแยกตัวประกอบ

มีขั้นตอนและวิธีการแก้สมการดังนี้

จากสมการกำลังสองสามารถแยกตัวประกอบได้ดังนี้

$$ax^2 + bx + c = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$$

ขั้นตอนที่ 1

$$(ax^2) + bx + c = (a_1x + \dots)(a_2x + \dots)$$

$$\text{โดยเงื่อนไข } (a_1x) \times (a_2x) = ax^2$$

ขั้นตอนที่ 2

$$ax^2 + bx + c = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$$

$$\text{โดยเงื่อนไข } c_1 \times c_2 = c$$

ขั้นตอนที่ 3

$$ax^2 + bx + c = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$$

$$\text{โดยเงื่อนไข } (a_1x \cdot c_2) + (a_2x \cdot c_1) = bx$$

4.7 การแก้สมการกำลังสองโดยทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

จะใช้การจัดพหุนามกำลังสองให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

รูปของสมการกำลังสอง

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \text{หน้า} & \text{หลัง} \end{array}$$

$$\text{เขียนเป็นสูตรได้ว่า } (\text{หน้า})^2 \pm (2 \text{ หน้า หลัง}) + (\text{หลัง})^2 = (\text{หน้า} \pm \text{หลัง})^2$$

$$\text{จัดรูปเป็นลบ } ax^2 - 2xb + b^2 - b^2 + c = 0$$

$$\text{จัดรูปเป็นบวก } ax^2 + 2xb + b^2 - b^2 - c = 0$$

เมื่อเราทำสมการกำลังสองจัดรูปให้อยู่ในกำลังสองสมบูรณ์แล้ว จะต้องหาคำตอบของสมการจากการแยกตัวประกอบหรือการใช้สมบัติของรากที่อยู่ในรูปเครื่องหมายกรณฑ์

4.8 การแก้สมการกำลังสองโดยใช้สูตร

สมการกำลังสอง (Quadratic Equation) เขียนอยู่ในรูปของ $ax^2 + bx + c = 0$ สามารถนำค่าคงที่ a , b , และ c แทนลงในสูตรเพื่อหาค่าของตัวแปรได้

$$\text{สูตรหาค่าตัวแปร สมการกำลังสอง } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \dots\dots\dots [1]$$

โดยมีเงื่อนไขในการใช้สูตร ดังนี้

1. $a \neq 0$
2. $b^2 - 4ac \geq 0$

ตัวอย่างที่ 3.1 จงแก้สมการเชิงเส้นสองตัวแปร สองสมการ โดยใช้กราฟ

$$2x - y = 1 \dots\dots\dots [1]$$

$$x + y = 2 \dots\dots\dots [2]$$

วิธีทำ

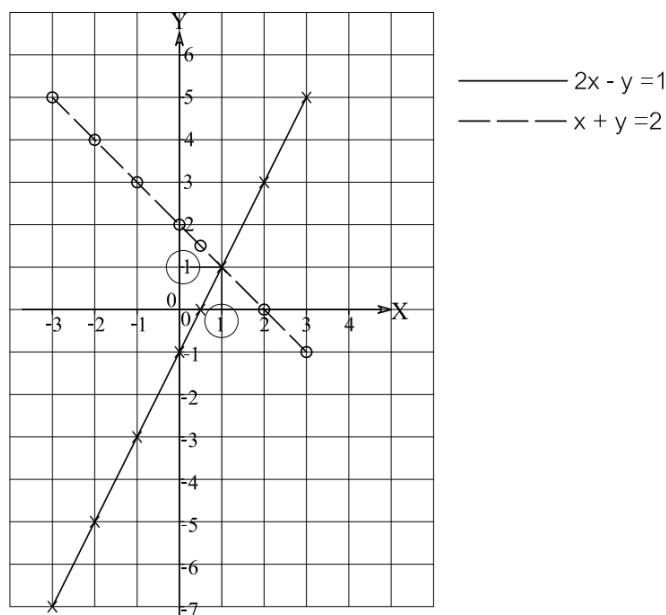
จากสมการ $2x - y = 1$ หาส่วนตัด x และส่วนตัด y

กำหนดให้ $y = 0$; $2x - 0 = 1$ ดังนั้น $x = \frac{1}{2} = 0.5$

กำหนดให้ $x = 0$; $2(0) - y = 1$ ดังนั้น $y = -1$

หาจุดอันดับที่ทำให้กราฟวางตัวเป็นแนวเส้นตรงตัดทั้งแกน x และแกน y

x	-3	-2	-1	0	0.5	1	2	3
$2x - y = 1$	-7	-5	-3	-1	0	1	3	5



รูปที่ 3.1

จากสมการ $x + y = 2$ หาส่วนตัด x และส่วนตัด y

กำหนดให้ $y = 0$; $x + 0 = 2$ ดังนั้น $x = 2$

กำหนดให้ $x = 0$; $0 + y = 2$ ดังนั้น $y = 2$

หาคู่อันดับที่ทำให้กราฟวางตัวเป็นแนวเส้นตรงตัดทั้งแกน x และแกน y

x	-3	-2	-1	0	0.5	1	2	3
$x + y = 2$	5	4	3	2	1.5	1	0	-1

นำคู่อันดับที่ได้มาเขียนกราฟในพิกัดฉากแสดงดังรูป 3.1

จากกราฟ จุดที่กราฟสองเส้นตัดกันเมื่อลากเส้นตั้งฉากลงมาตัดกับแกน x อ่านค่าได้ 1 และจากจุดตัดฉากเส้นแนวนอนมาตัดกับแกน y อ่านค่าได้ 1 ดังนั้นคำตอบของสมการคือ (1, 1) **ตอบ**

ตรวจคำตอบ $2(1) - 1 = 1$ จะได้ $1 = 1$ สมการเป็นจริง

$1 + 1 = 2$ จะได้ $2 = 2$ สมการเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 3.2 จงแก้สมการเชิงเส้นสองตัวแปร สองสมการ โดยใช้กราฟ

$$x - 2y = 5 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$2x - 4y = 6 \quad \dots\dots\dots[2]$$

วิธีทำ

จากสมการ $x - 2y = 5$ หาส่วนตัด x และส่วนตัด y

กำหนดให้ $y = 0$; $x - 2(0) = 5$ ดังนั้น $x = 5$

กำหนดให้ $x = 0$; $0 - 2y = 5$ ดังนั้น $y = \frac{5}{-2} = -2.5$

หาคู่อันดับที่ทำให้กราฟวางตัวเป็นแนวเส้นตรงตัดทั้งแกน x และแกน y

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x - 2y = 5$	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5

จากสมการ $2x - 4y = 6$ หาส่วนตัด x และส่วนตัด y

กำหนดให้ $y = 0$; $2x - 4(0) = 6$ ดังนั้น $x = \frac{6}{2} = 3$

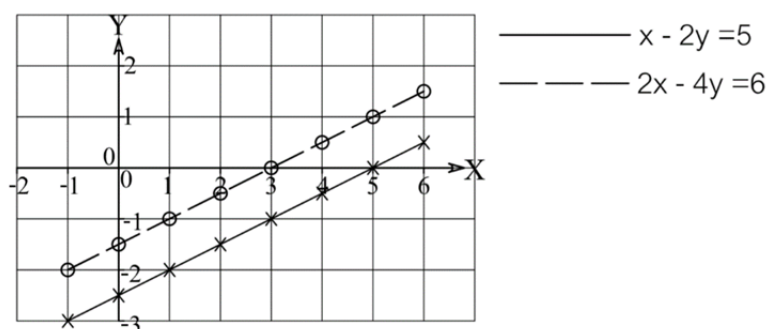
กำหนดให้ $x = 0$; $2(0) - 4y = 6$ ดังนั้น $y = \frac{6}{-4} = -1.5$

หาคู่อันดับที่ทำให้กราฟวางตัวเป็นแนวเส้นตรงตัดทั้งแกน x และแกน y

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$2x - 4y = 6$	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5

จากกราฟรูปที่ 3.2 พบว่าเส้นกราฟทั้งสองเส้นวางตัวขนานกันไป ไม่มีจุดตัดกัน นั้นหมายถึงไม่มีค่าคู่อันดับ (x, y) ใดที่สอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรนี้

ดังนั้นโจทย์ข้อนี้ไม่มีคำตอบ **ตอบ**



รูปที่ 3.2

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูอธิบายเกี่ยวกับสาระสำคัญและจุดประสงค์การเรียนรู้
2. นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนหน่วยการเรียนรู้ที่ 3

ขั้นสอน

3. ครูอธิบายเนื้อหาและให้ความรู้ ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 สมการเชิงเส้นสองตัวแปรและสมการกำลังสอง

4. นักเรียนทำแบบทดสอบหน่วยที่ 3 ในหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ช่วงโยธา

ขั้นสรุปและการประยุกต์

5. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบประเมินผลการเรียนรู้บทที่ 3 พร้อมกับสรุปบทเรียนร่วมกัน

6. สื่อการเรียนรู้

เอกชัย รัตนโน. คณิตศาสตร์ช่วงโยธา (Mathematics for Civil Work) รหัสวิชา 20121-1001 , พิมพ์และจัดจำหน่ายโดย บริษัท ซีเอ็ดดูเคชั่น จำกัด (มหาชน) , พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2565

7. การวัดผลประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 3
3. สังเกตและประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 3
2. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยอาจารย์และนักศึกษา ร่วมกันประเมิน

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล เกณฑ์ผ่าน ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 3 เกณฑ์ผ่าน ทำถูกต้อง 60% ขึ้นไป
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับ การประเมินตามสภาพจริง

8. กิจกรรมเสนอแนะ/งานที่มอบหมาย

8.1 กิจกรรมเสนอแนะ

8.1.1 ให้นักศึกษาค้นคว้าหาข้อมูลเพิ่มเติม นอกเหนือจากเนื้อหาบทเรียนที่เรียนมาทาง อินเทอร์เน็ต

8.1.2 ให้นักศึกษาสังเกตสิ่งรอบตัว ทั้งในวิทยาลัยฯ และภายนอก ว่ามีสิ่งใดบ้างที่สัมพันธ์กับ เนื้อหาบทเรียนที่เรียนมา

8.2 งานที่มอบหมาย

ทำในหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ช่วงโยธา บทที่ 3 สมการเชิงเส้นสองตัวแปรและ สมการกำลังสอง

8.2.1 แบบทดสอบก่อนเรียนบทที่ 3 สมการเชิงเส้นสองตัวแปรและสมการกำลังสอง

8.2.2 แบบประเมินผลการเรียนรู้บทที่ 3 สมการเชิงเส้นสองตัวแปรและสมการกำลังสอง

8.2.3 แบบทดสอบหลังเรียนบทที่ 3 สมการเชิงเส้นสองตัวแปรและสมการกำลังสอง

9. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

1. ผลการใช้แผนการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

2. ผลการเรียนรู้ของนักเรียน/ผลการสอนของครู/ปัญหาที่พบ

.....

.....

.....

.....

3. แนวทางการแก้ปัญหา

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ตัวแทนนักเรียน

ลงชื่อ.....

(.....)

ครูผู้สอน

การประเมินผล บทที่ 3 สมการเชิงเส้นสองตัวแปรและสมการกำลังสอง

คำชี้แจง : คะแนนรวมต่อบท 100 คะแนนเต็ม

1. แบบฝึกหัด จำนวน 10 ข้อ ข้อละ คะแนน รวม คะแนน
2. แบบประเมินผลก่อนและหลังการเรียนรู้ จำนวน 10 ข้อ ข้อละ คะแนน รวม คะแนน
3. ประเมินจิตพิสัยตามสภาพจริง 20 คะแนน

แบบวัดผล						
บทที่ 3 สมการเชิงเส้นสองตัวแปรและสมการกำลังสอง (Two Variables Linear Equation and Quadratic Equation)						
ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา รหัสวิชา 20121-1001				วิทยาลัย		
ชื่อ-สกุล..... ระดับ.....				ครู		
ที่	รายการประเมิน	คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน		คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน		คะแนนแบบฝึกหัด
		คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	
1	ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร					
2	การหาคำตอบระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยใช้กราฟ					
3	การหาคำตอบระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยวิธีทางพีชคณิต การแทนค่า					
4	สมการกำลังสอง					
5	การแก้สมการกำลังสองโดยวิธีแยกตัวประกอบ					
6	การแก้สมการกำลังสองโดยทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์					
7	การแก้สมการกำลังสองโดยใช้สูตร					
รวมคะแนนด้านทักษะ		10		10		60
13	ความขยันหมั่นเพียร ความวิริยะอุตสาหะ					10
14	ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์สุจริต					10
รวมคะแนนทั้งหมด				100		รวม

	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4	หน่วยที่ 4
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา	เวลาเรียนรวม 36 ชม.
	ชื่อหน่วย บทที่ 4 การแก้สมการโดยเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์	สอนครั้งที่ 7-8/18
ชื่อเรื่อง ทฤษฎีของเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์		จำนวน 4 คาบ

1. สารสำคัญ

การแก้สมการเชิงเส้น 2 สมการ 2 ตัวแปรได้เขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\text{จากระบบสมการ } 4x + 2y = 10 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$3x - 5y = 1 \quad \dots\dots\dots[2] \quad \text{รูปของเมทริกซ์} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

การคูณกันระหว่างเมทริกซ์กับเมทริกซ์ทำได้ก็ต่อเมื่อเมทริกซ์ของตัวตั้งมีหลักเท่ากับแถวของเมทริกซ์ที่จะนำมาคูณ

$$\text{ถ้ากำหนดให้ } A \times B = C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_{11} & a_{11} \times b_{12} \\ a_{12} \times b_{21} & a_{12} \times b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ } 2 \times 2 \text{ หาได้จาก } A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = +(a \times d) - (c \times b)$$

อินเวอร์สของเมทริกซ์ 2×2 กำหนดโดยเมทริกซ์ A เป็น A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{ถ้า} \quad ad - bc \neq 0 \quad \text{จะได้ว่า} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

การแก้ปัญหสมการเชิงเส้นทำได้ 2 วิธีคือ โดยการใช้เมทริกซ์และการใช้ดีเทอร์มิแนนต์

2. สารการเรียนรู้

1. เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์
2. การบวก ลบและการคูณสเกลาร์กับเมทริกซ์
3. การคูณกันระหว่างเมทริกซ์กับเมทริกซ์
4. ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ 2×2
5. อินเวอร์สของเมทริกซ์ 2×2
6. การแก้ปัญหของสมการเชิงเส้นโดยเมทริกซ์
7. การแก้ปัญหของสมการเชิงเส้นโดยดีเทอร์มิแนนต์

3. จุดประสงค์การเรียนรู้

จุดประสงค์ทั่วไป

เพื่อให้มีความเข้าใจเกี่ยวกับเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ การบวกลบ การคูณปริมาณสเกลาร์กับเมทริกซ์ การคูณกันระหว่างเมทริกซ์กับเมทริกซ์ การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์และอินเวอร์สของเมทริกซ์ขนาด สามารถนำเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์เข้าแก้ปัญหาสมการเชิงเส้นในการคำนวณในงานโยธาได้

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เข้าใจเกี่ยวกับเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์และสามารถ บวก ลบ และคูณปริมาณสเกลาร์กับเมทริกซ์ได้อย่างถูกต้อง
2. สามารถแสดงวิธีการคำนวณและหาผลลัพธ์การคูณกันระหว่างเมทริกซ์กับเมทริกซ์ได้อย่างถูกต้อง
3. สามารถแสดงวิธีการคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์และอินเวอร์สของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ได้อย่างถูกต้อง
4. สามารถสร้างสมการเชิงเส้นสองสมการสองตัวแปรจากโจทย์ปัญหาด้านงานโยธาและประยุกต์ใช้เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์เข้าแก้ปัญหาสมการเชิงเส้นได้อย่างถูกต้อง

4. สารการเรียนรู้

4.1 เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ (Matrix and Determinant)

เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ (Matrix and Determinant) ในงานด้านช่างโยธาจะใช้นำมาแก้สมการเชิงเส้นพร้อมกัน ในบทนี้จะเป็นการอธิบายถึงทฤษฎีเพื่อให้สามารถนำไปใช้ในการแก้สมการเชิงเส้น 2 สมการ 2 ตัวแปร ได้

ระบบสมการเชิงเส้น สองสมการ สองตัวแปรจะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\text{จากระบบสมการ } 4x + 2y = 10 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$3x - 5y = 1 \quad \dots\dots\dots[2]$$

$$\text{รูปของเมทริกซ์} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

ระบบสมการเชิงเส้น สามสมการ สามตัวแปรจะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\text{จากระบบสมการ } 2x + 3y - z = -5 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$x - 4y + 2z = 21 \quad \dots\dots\dots[2]$$

$$5x + 2y - 3z = -4 \quad \dots\dots\dots[3]$$

$$\text{รูปของเมทริกซ์} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

จำนวนที่เขียนภายในเมทริกซ์ (ภายในวงเล็บ) จะเรียกว่า array และสัมประสิทธิ์ในรูปของ array จะเรียกว่าสมาชิกของเมทริกซ์ หรือ elements of the matrix จำนวนของแถว (row) ในเมทริกซ์จะใช้สัญลักษณ์ m และจำนวนของหลักจะใช้สัญลักษณ์ n ดังนั้นขนาดของเมทริกซ์จะเขียนแทนด้วยจำนวนของแถวและตามด้วยจำนวนหลัก ตัวอย่างเช่น

$$\text{รูปของเมทริกซ์} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{ขนาด } m \times n \quad \text{หรือ} \quad 2 \times 3$$

$$\text{รูปของเมทริกซ์} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{ขนาด } m \times n \quad \text{หรือ} \quad 2 \times 1$$

จำนวนที่อยู่ในรูปของเมทริกซ์เราจะนิยมใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่เป็นชื่อเรียกจำนวนเมทริกซ์นั้น ๆ เช่น

$$\text{เมทริกซ์ A} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ขนาด } m \times n \quad \text{หรือ} \quad 1 \times 3$$

$$\text{เมทริกซ์ B} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 0 & -6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ขนาด } m \times n \quad \text{หรือ} \quad 3 \times 2$$

เมทริกซ์ไม่สามารถทำให้เป็นปริมาณค่าตัวเลขโดด ๆ ได้แต่จะใช้วิธีการที่ง่ายโดยการรวมกันโดยใช้กฎตัวเลขในทางคณิตศาสตร์สำหรับการ บวก ลบ คูณและหารตัวเลข กฎเหล่านี้สามารถใช้กับเมทริกซ์ได้และกฎของเมทริกซ์เป็นไปตามกฎส่วนใหญ่ที่ควบคุมระบบพีชคณิตของตัวเลขอีกด้วย

4.2 การบวก ลบและการคูณสเกลาร์กับเมทริกซ์ (Addition, Subtraction and Multiplication of Scalars and Matrices)

สมาชิกที่สอดคล้องกันหรืออยู่ในตำแหน่งเดียวกันในสองเมทริกซ์อาจจะมีค่าเท่ากับเมทริกซ์เดียวได้ โดยใช้กฎของการ บวก ลบและคูณในทางคณิตศาสตร์ดังที่กล่าวมาแล้ว และการที่เมทริกซ์จะมาทำการบวกหรือลบกันได้เมทริกซ์นั้นจะต้องมีขนาดเท่ากัน แสดงตัวอย่างดังนี้

ตัวอย่างที่ 4.1 กำหนดให้ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$ และ $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ จงคำนวณหา $A + B$

วิธีทำ นำสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันบวกกันตามเครื่องหมาย

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+(-3) & -1+0 \\ -7+7 & 4+(-4) \end{pmatrix}$$

$$\text{เมทริกซ์ที่ได้} \quad = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 4.2 กำหนดให้ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ และ $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ จงคำนวณหา $A + B$

วิธีทำ นำสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันบวกกันตามเครื่องหมาย

$$\begin{aligned}
 A + B &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3+2 & 1+7 & -4+(-5) \\ 4+(-2) & 3+1 & 1+0 \\ 1+6 & 4+3 & -3+4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 5 & 8 & -9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 7 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

เมทริกซ์ที่ได้

4.3 การคูณกันระหว่างเมทริกซ์กับเมทริกซ์ (Multiplication of Matrices)

การคูณกันระหว่างเมทริกซ์กับเมทริกซ์จะทำได้ก็ต่อเมื่อเมทริกซ์ของตัวตั้งมีหลักเท่ากับแถวของเมทริกซ์ที่จะนำมาคูณ แสดงตัวอย่างดังนี้

$$\text{ถ้ากำหนดให้ } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \text{ และ } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

เมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 1×2 สมาชิกทุกตัวแสดงด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก a กำกับด้วยตำแหน่งของแถวและหลัก เช่นกันที่เมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 สมาชิกทุกตัวแสดงด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก b กำกับด้วยตำแหน่งของแถวและหลัก ต่อไปเราจะตรวจสอบเงื่อนไขในการคูณกันระหว่างเมทริกซ์กับเมทริกซ์

ถ้ากำหนดให้ $A \times B = C$ เมทริกซ์ A มีจำนวน 2 หลัก และเมทริกซ์ B มีจำนวน 2 แถว ดังนั้นเมทริกซ์ทั้งสองสามารถคูณกันได้ต่อไปจะหาเมทริกซ์ C ซึ่งเป็นผลที่ได้จากการคูณกัน แสดงตัวอย่าง

$$\begin{aligned}
 C &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\
 C &= \begin{pmatrix} a_{11} \times b_{11} & a_{11} \times b_{12} \\ a_{12} \times b_{21} & a_{12} \times b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.3 กำหนดให้ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ จงคำนวณหา $A \times B = C$

วิธีทำ ตรวจสอบจำนวนหลักของเมทริกซ์ A คือ 2 จำนวนแถวของเมทริกซ์ B คือ 2 มีค่าเท่ากัน เมทริกซ์ทั้งสองสามารถคูณกันได้

$$A \times B = C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

สมาชิกแถวที่ 1 หลักที่ 1 $C_{11} = [2 \times (-5)] + [3 \times (-3)] = -19$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

สมาชิกแถวที่ 1 หลักที่ 2 $C_{12} = [2 \times 7] + [3 \times 4] = 26$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

สมาชิกแถวที่ 2 หลักที่ 1 $C_{21} = [1 \times (-5)] + [(-4) \times (-3)] = 7$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

สมาชิกแถวที่ 2 หลักที่ 2 $C_{22} = [1 \times 7] + [(-4) \times 4] = -9$

ผลลัพธ์ $A \times B = C = \begin{pmatrix} -19 & 26 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$ **ตอบ**

4.4 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ 2×2 (2 by 2 Matrix Determinant)

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ 2×2 (2 by 2 Matrix Determinant) กำหนดโดย $(ad - bc)$

โดยที่ตำแหน่งต่าง ๆ จะกำหนดให้เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ขนาด 2×2 หรือ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ การเขียนดีเทอร์มิแนนต์

จะเขียนสมาชิกของเมทริกซ์ให้อยู่ระหว่างเส้นตรงหรือ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ การหาค่าของดีเทอร์มิแนนต์ทำโดยการคูณทแยงไขว้โดยการคูณทแยงไขว้ชี้ที่ลดลงให้เป็นค่าบวกและการคูณทแยงไขว้ชี้ที่ขึ้นให้เป็นค่าลบ แสดงดังตัวอย่าง

กำหนดให้เมทริกซ์ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = +(a \times d) - (b \times c)$$

4.5 อินเวอร์สของเมทริกซ์ 2×2 (2 by 2 Inverse Matrix)

อินเวอร์สของเมทริกซ์ 2×2 (2 by 2 Inverse Matrix) กำหนดโดยเมทริกซ์ A เป็น A^{-1}

หรือคำนวณในรูปของเมทริกซ์หนึ่งหน่วย (Unit Matrix) $A \times A^{-1} = I$ โดยที่ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

อีกวิธีการหนึ่งที่รวดเร็วกว่าในการหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ขนาด 2×2 เราสามารถนำสมบัติเกี่ยวกับการคูณและการเท่ากันของเมทริกซ์มาใช้แก้ปัญหาได้ แสดงดังนี้

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{ถ้า } ad - bc \neq 0 \quad \text{จะได้ว่า } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

อธิบายได้ว่า

1. ได้จากการสลับที่ของสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักของ A (ตามเส้นประหัวลูกศร)
2. ได้จากการเปลี่ยนเครื่องหมายเป็นตรงกันข้ามของสมาชิกอีกแถวหนึ่ง (ตามเส้นประ

วงกลม)

หมายเหตุ เมทริกซ์จัตุรัสใดๆ อาจจะไม่อินเวอร์สก็ได้ โดยจะเรียกเมทริกซ์ที่ไม่มีอินเวอร์สว่า เมทริกซ์เอกฐาน (Singular Matrix) และเรียกเมทริกซ์ที่มีอินเวอร์สว่า เมทริกซ์มิใช่เอกฐาน (Inversible or Non-singular Matrix)

4.6 การแก้ปัญหของสมการเชิงเส้นโดยเมทริกซ์ (Solving Problems of Linear Equations by Matrices)

สำหรับการแก้ปัญหสมการเชิงเส้น 2 สมการพร้อมกัน (Simultaneous) ที่มี 2 ตัวแปร (two unknowns) โดยใช้เมทริกซ์มีลำดับขั้นตอนดังนี้

1. เขียนรูปของสมการเชิงเส้น 2 สมการ 2 ตัวแปร

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

2. เขียนสมการเมทริกซ์ที่สอดคล้องกับสมการเหล่านี้

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

3. คำนวณหาอินเวอร์สเมทริกซ์ของ $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{a_1b_2 - b_1a_2} \begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

4. นำค่าอินเวอร์สเมทริกซ์ที่ได้คูณเข้าทั้งสองด้าน

คูณเข้ากับ $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ จะได้เมทริกซ์หนึ่งหน่วย (Unit Matrix) หรือ $A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

คูณเข้ากับค่าคงที่หรือ $A^{-1} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ จะได้คำตอบของสมการคือค่า $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

4.7 การแก้ปัญหของสมการเชิงเส้นโดยดีเทอร์มิแนนต์ (Solving Problems of Linear Equations by Determinants)

สำหรับการแก้ปัญหสมการเชิงเส้น 2 สมการพร้อมกัน (Simultaneous) ที่มี 2 ตัวแปร (two unknowns) โดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์มีลำดับขั้นตอนดังนี้

1. เขียนรูปของสมการเชิงเส้น 2 สมการ 2 ตัวแปร

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

2. คำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่สอดคล้องกับสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

3. คำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่หลักถูกแทนที่ด้วยค่าคงที่

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

4. แก้ปัญหา คำนวณหาค่าตัวแปร

$$\text{กำหนดให้ } \frac{x}{D_x} = \frac{-y}{D_y} = \frac{1}{D} \quad \text{โดยที่ } \frac{x}{D_x} = \frac{1}{D} \quad \text{และ} \quad \frac{-y}{D_y} = \frac{1}{D}$$

ตัวอย่างที่ 4.4 จงใช้ดีเทอร์มิแนนต์แก้ปัญหสมการเชิงเส้น 2 สมการ 2 ตัวแปร

$$3x - 4y = 12 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$7x + 5y = 6.5 \quad \dots\dots\dots[2]$$

วิธีทำ

1. เขียนรูปของสมการเชิงเส้น 2 สมการ 2 ตัวแปร

$$3x - 4y - 12 = 0$$

$$7x + 5y - 6.5 = 0$$

2. คำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่สอดคล้องกับสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 43$$

3. คำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่หลักถูกแทนที่ด้วยค่าคงที่

$$D_x = \begin{vmatrix} -4 & -12 \\ 5 & -6.5 \end{vmatrix} = 86$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -12 \\ 7 & -6.5 \end{vmatrix} = 64.5$$

4. แก้ปัญหา คำนวณหาค่าตัวแปร

กำหนดให้ $\frac{x}{D_x} = \frac{-y}{D_y} = \frac{1}{D}$

โดยที่ $\frac{x}{D_x} = \frac{1}{D}$ ดังนั้น $\frac{x}{86} = \frac{1}{43}$ หรือ $x = \frac{86}{43} = 2$

โดยที่ $\frac{-y}{D_y} = \frac{1}{D}$ ดังนั้น $\frac{-y}{64.5} = \frac{1}{43}$ หรือ $y = \frac{64.5}{43} = -1.5$

คำตอบของสมการคือ

$$x = 2, y = -1.5$$

ตอบ

ตรวจสอบคำตอบ

$$3(2) - 4(-1.5) = 12$$

สมการเป็นจริง

$$7(2) + 5(-1.5) = 6.5$$

สมการเป็นจริง

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูอธิบายเกี่ยวกับสาระสำคัญและจุดประสงค์การเรียนรู้
2. นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนหน่วยการเรียนรู้ที่ 4

ขั้นสอน

3. ครูอธิบายเนื้อหาและให้ความรู้ ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 4 ทฤษฎีของเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์
4. นักเรียนทำแบบทดสอบหน่วยที่ 4 ในหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ช่างโยธา

ขั้นสรุปและการประยุกต์

5. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบประเมินผลการเรียนรู้บทที่ 4 พร้อมกับสรุปบทเรียนร่วมกัน

6. สื่อการเรียนรู้

เอกชัย รัตนโน. คณิตศาสตร์ช่างโยธา (Mathematics for Civil Work) รหัสวิชา 20121-1001, พิมพ์และจัดจำหน่ายโดย บริษัท ซีเอ็ดดูเคชั่น จำกัด (มหาชน), พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2565

7. การวัดผลประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. ตรวจสอบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 4
3. สังเกตและประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 4
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยอาจารย์และนักศึกษา ร่วมกันประเมิน

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล เกณฑ์ผ่าน ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 4 เกณฑ์ผ่าน ทำถูกต้อง 60% ขึ้นไป
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับ การประเมินตามสภาพจริง

8. กิจกรรมเสนอแนะ/งานที่มอบหมาย

8.1 กิจกรรมเสนอแนะ

- 8.1.1 ให้นักศึกษาค้นคว้าหาข้อมูลเพิ่มเติม นอกเหนือจากเนื้อหาบทเรียนที่เรียนมาทาง อินเทอร์เน็ต
- 8.1.2 ให้นักศึกษาสังเกตสิ่งรอบตัว ทั้งในวิทยาลัยฯ และภายนอก ว่ามีสิ่งใดบ้างที่สัมพันธ์กับ เนื้อหาบทเรียนที่เรียนมา

8.2 งานที่มอบหมาย

ทำในหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ช่วงโยธา บทที่ 4 ทฤษฎีของเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์

- 8.2.1 แบบทดสอบก่อนเรียนบทที่ 4 ทฤษฎีของเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์
- 8.2.2 แบบประเมินผลการเรียนรู้บทที่ 4 ทฤษฎีของเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์
- 8.2.3 แบบทดสอบหลังเรียนบทที่ 4 ทฤษฎีของเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์

9. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

1. ผลการใช้แผนการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

2. ผลการเรียนรู้ของนักเรียน/ผลการสอนของครู/ปัญหาที่พบ

.....

.....

.....

.....

.....

3. แนวทางการแก้ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ตัวแทนนักเรียน

ลงชื่อ.....

(.....)

ครูผู้สอน

การประเมินผล บทที่ 4 การทฤษฎีของเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์

คำชี้แจง : คะแนนรวมต่อบท 100 คะแนนเต็ม

1. แบบฝึกหัด จำนวน 10 ข้อ ข้อละ คะแนน รวม คะแนน
2. แบบประเมินผลก่อนและหลังการเรียนรู้ จำนวน 10 ข้อ ข้อละ คะแนน รวม คะแนน
3. ประเมินจิตพิสัยตามสภาพจริง 20 คะแนน

แบบวัดผล						
บทที่ 4 การแก้สมการโดยเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์						
ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา รหัสวิชา 20121-1001				วิทยาลัย		
ชื่อ-สกุล..... ระดับ.....				ครู		
ที่	รายการประเมิน	คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน		คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน		คะแนนแบบฝึกหัด
		คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	
1	เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์					
2	การบวก ลบ และการคูณสเกลาร์กับเมทริกซ์					
3	การคูณกันระหว่างเมทริกซ์กับเมทริกซ์					
4	ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ 2×2					
5	อินเวอร์สของเมทริกซ์ 2×2					
6	การแก้ปัญหของสมการเชิงเส้นโดยเมทริกซ์					
7	การแก้ปัญหของสมการเชิงเส้นโดยดีเทอร์มิแนนต์					
8						
9						
10						
รวมคะแนนด้านทักษะ		10		10		60
13	ความขยันหมั่นเพียร ความวิริยะอุตสาหะ					10
14	ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์สุจริต					10
รวมคะแนนทั้งหมด				100		รวม

	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5	หน่วยที่ 5
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา	เวลาเรียนรวม 36 ชม.
	ชื่อหน่วย บทที่ 5 พื้นฐานเลขยกกำลัง รากและกรณฑ์	สอนครั้งที่ 9-10/18
ชื่อเรื่อง พื้นฐานเลขยกกำลัง รากและกรณฑ์		จำนวน 4 คาบ

1. สารสำคัญ

เลขยกกำลัง (Power) เขียนอยู่ในรูปทั่วไปคือ a^n ซึ่งเราจะเรียก a เป็นฐาน (Base) และ n เป็นเลขชี้กำลัง (Exponent)

การหารากที่ 2 ของจำนวนจริงที่เขียนอยู่ในรูปของกรณฑ์ (Square Root) คือเครื่องหมายทางคณิตศาสตร์ในรูปสัญลักษณ์ $\sqrt{\quad}$ เช่น $\sqrt{a}$ อ่านว่า กรณฑ์ของ a (Square Root of a)

กรณีการคูณจำนวนทศนิยม (Decimal number) โดยเลขยกกำลังฐาน 10 เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม ค่าของจำนวนทศนิยมจะมีการเปลี่ยนแปลงจากการเลื่อนของจุดทศนิยม

2. สารการเรียนรู้

1. พื้นฐานเลขยกกำลัง
2. เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเศษส่วน
3. พื้นฐานรากที่ 2 ของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปของกรณฑ์
4. การคูณและการหารจำนวนเต็มโดยเลขยกกำลังฐาน 10

3. จุดประสงค์การเรียนรู้

จุดประสงค์ทั่วไป

เพื่อให้มีความเข้าใจเกี่ยวกับพื้นฐานเลขยกกำลัง การหาค่าเลขยกกำลัง การทำจำนวนจริงใดๆ ให้อยู่ในรูปของเลขยกกำลัง เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นเศษส่วนหรือจำนวนตรรกยะ การหารากที่ n ของจำนวนจริง พื้นฐานการหารากที่สองที่อยู่ในรูปของกรณฑ์ การหาค่าจำนวนที่คูณหรือหารด้วยเลขยกกำลังฐาน 10 และประยุกต์ความรู้ที่ได้ในบทเรียนเพื่อใช้แก้ปัญหาทางช่างโยธาได้

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. รู้และเข้าใจพื้นฐานของเลขยกกำลังและคำนวณค่าของเลขยกกำลังได้ถูกต้อง
2. ทำจำนวนจริงใด ๆ ให้อยู่ในรูปของเลขยกกำลังได้ถูกต้อง
3. รู้และเข้าใจเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นเศษส่วนหรือจำนวนตรรกยะ
4. พื้นฐานคำนวณหารากที่ n และหารากที่สองที่อยู่ในรูปของกรณฑ์ ได้ถูกต้อง
5. คำนวณหาค่าจำนวนที่คูณหรือหารด้วยเลขยกกำลังฐาน 10
6. ประยุกต์ความรู้ที่ได้ในบทเรียนเพื่อใช้คำนวณหรือแก้ปัญหาทางช่างโยธาได้ถูกต้อง
7. ประพฤติตนดี มีกิริยาสุภาพ เรียบร้อยและมีความขยันหมั่นเพียร

4. การเรียนรู้

4.1 พื้นฐานเลขยกกำลัง (Basic of Power)

บทนิยาม ถ้า a แทนจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ และ n แทนจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1
ถ้า “ a ยกกำลัง n ” เขียนแทนด้วย a^n ซึ่งเราจะเรียก a^n ว่า เลขยกกำลัง (Power) ที่มี a เป็นฐาน (Base) และ n เป็นเลขชี้กำลัง (Exponent) ซึ่งเป็นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ (Arithmetic operation) จากการเพิ่มจำนวนของเลขฐานโดยการคูณซ้ำ ๆ ด้วยจำนวนตัวเองจนนับได้เท่ากับจำนวนเลขชี้กำลัง เขียนได้ว่า

$$a^n = a \times a \times a \times a \dots \times a \quad (\text{นับจำนวน } a \text{ ได้ } n \text{ ตัว})$$

เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็ม

หรือ $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \quad (\text{นับจำนวน } 2 \text{ ได้ } 5 \text{ ตัว})$

เลขยกกำลัง 2^5 อ่านว่า “สองยกกำลังห้า” หรือ “กำลังห้าของสอง” หรือ “สองกำลังห้า”
โดยที่ 2^5 มี 2 เป็น ฐาน และมี 5 เป็น เลขชี้กำลัง หรืออาจเขียนได้ว่า

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 \quad (\text{นับจำนวน } 2 \text{ ได้ } 5 \text{ ตัว})$$

สมบัติบางอย่างที่เกี่ยวข้องกับเลขยกกำลัง

1. จำนวนจริงใดไม่แสดงเลขชี้กำลัง จำนวนนั้นจะมีเลขชี้กำลังเป็น 1 เช่น จำนวน $= 2^5$
2. จำนวนจริงใดแสดงเลขชี้กำลังเป็นค่าลบ ให้ทำจำนวนนั้นอยู่ในรูปตัวหารและกำลังเป็นค่า

บวก เช่น จำนวน $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$

อนึ่ง ในการเขียนเลขยกกำลังกรณีเขียนตัวฐานอยู่ในวงเล็บ หรือตัวฐานไม่มีวงเล็บจะมีความหมายที่แตกต่างกัน

4.2 เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเศษส่วน (Fraction is Exponent)

ในกรณีที่เลขยกกำลังมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเศษส่วน (จำนวนตรรกยะ)

นิยาม ถ้า $a^{\frac{1}{n}} = b$

จะได้ว่า $a \times a \times a \times a \dots \times a = b^n \quad (a \text{ คูณกัน } n \text{ ตัว})$

โดยที่ $a =$ เป็นจำนวนจริง

$a =$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์

$n =$ เป็นจำนวนเต็มมากกว่า 1

จากนิยามดังกล่าวเราสามารถพิสูจน์ได้ เช่น $8^{\frac{1}{3}} = 2$ เราจะเรียกจำนวนนี้ว่า รากที่ 3 ของ 8 (Third root of 8) เท่ากับ 2

$$8^{\frac{1}{3}} = 2$$

$$(2 \times 2 \times 2)^{\frac{1}{3}} = 2$$

$$2 \times 2 \times 2 = 2^{\frac{3}{1}}$$

หรือ

$$8 = 2^3$$

$\frac{1}{n}$ คือ เลขชี้กำลังที่เป็นเศษส่วนอย่างต่ำเท่านั้น และ n เป็นจำนวนเต็มมากกว่า 1

ถ้า n เป็นจำนวนคี่ จะหารากที่ n ของ a ได้สำหรับทุกจำนวนจริงของ a และรากที่ได้จะเป็นจำนวนจริงและมีรากเดียว

ถ้า n เป็นจำนวนคู่ จะหารากที่ n ของ a ได้สำหรับทุกจำนวนจริงของ a และรากที่ได้จะเป็นจำนวนจริงแต่จะมีรากสองจำนวน

และต้องอยู่ในเงื่อนไขของ a ดังต่อไปนี้

ถ้า $a \geq 0$ จะหารากที่ n ของ a ที่เป็นจำนวนจริงได้

ถ้า $a < 0$ จะหารากที่ n ของ a ที่เป็นจำนวนจริงได้ เฉพาะ n เป็นจำนวนคี่ (หรือ a ต้องไม่ติดลบ)

4.3 รากที่ 2 ของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปของกรณฑ์ (Square Root of Real Number in the Form of Square Root)

การหารากที่ 2 ของจำนวนจริงคือการหาค่าเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็น $\frac{1}{2}$ เขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ว่า $a^{\frac{1}{2}}$

เราจะเรียกปริมาณนี้ว่า รากที่ 2 ของจำนวน a (2nd root of a)

สำหรับการหารากที่ 2 ของจำนวนจริงที่เขียนอยู่ในรูปของกรณฑ์นั้น ก่อนอื่นเราต้องทำความเข้าใจเกี่ยวกับคำว่า กรณฑ์ (Square Root)

กรณฑ์ (Square Root) คือเครื่องหมายทางคณิตศาสตร์ในรูปสัญลักษณ์ $\sqrt{\quad}$ ตัวอย่าง

เมื่อ a, b คือจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์

$\sqrt{a}$ อ่านว่า กรณฑ์ของ a (Square Root of a) มีความหมายว่า รากที่ 2 ของ a การคำนวณหาค่า กรณฑ์ของ a จึงมีวิธีการคล้ายกันกับการหารากที่สอง (2nd Roots) ตัวอย่าง

จาก $a^{\frac{1}{2}}$ อ่านว่า เลขยกกำลังเศษหนึ่งส่วนสอง

นิยาม $a^{\frac{1}{2}} = \pm b$ หรือคำตอบของรากที่ 2 ของ a เท่ากับ b และ $-b$

โดยที่ $b \times b = a$ และ $(-b) \times (-b) = a$

จาก $\sqrt{a}$ อ่านว่า กรณฑ์ของ a

นิยาม $\sqrt{a} = b$ คำตอบกรณฑ์ของ a เท่ากับ b โดยที่ $b \times b = a$ (ซึ่งจะใช้ค่าหลักที่เป็นบวกเป็นคำตอบเดียว)

จากคำตอบที่ได้ใน 2 กรณีทำให้ทราบว่า รากที่ 2 ของ a เนื่องจาก $n=2$ เป็นเลขคู่ จะหาคำตอบได้สองคำตอบ แต่ในกรณี กรณฑ์ของ a จะหาคำตอบได้เพียงคำตอบเดียวเท่านั้นเพราะกรณฑ์จะเหมือนกับฟังก์ชัน

ในการหารากที่ 2 ของ a หรือกรณฑ์ของ a ที่เป็นจำนวนจริงบวกสามารถหาค่าได้ แต่การหารากที่ 2 ของ $-a$ หรือกรณฑ์ของ $-a$ ซึ่งเป็นจำนวนจริงลบ ไม่สามารถนิยามหรือหาค่าได้

ข้อสังเกต การเขียนเครื่องหมายกรณฑ์ส่วนบนจะยาวครอบคลุมจำนวนที่ถูกดำเนินการตลอด

4.4 การคูณและการหารจำนวนเต็มโดยเลขยกกำลังฐาน 10 (Multiplication and Division of Integers by Decimal Exponents)

การคูณจำนวนทศนิยม (Decimal number) โดยเลขยกกำลังฐาน 10 มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม ค่าของจำนวนทศนิยมจะมีการเปลี่ยนแปลงจากการเลื่อนของจุด โดยการเลื่อนจุดไปทางด้านขวา เลขชี้กำลังจะเป็นค่าบวก แต่หาการเลื่อนจุดไปทางซ้ายแสดงว่าเลขชี้กำลังมีค่าลบ เช่น

เลขยกกำลัง 10^3 เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก 3 แสดงว่าเลื่อนจุดไปทางขวามือ 3 ตำแหน่ง

$$1.23456 \times 10^3 = 1234.56$$

เลขยกกำลัง 10^{-3} เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มลบ 3 แสดงว่าเลื่อนจุดไปทางซ้ายมือ 3 ตำแหน่ง

$$1.23456 \times 10^{-3} = 0.00123456$$

หรือ $1.23456 \div 10^3 = 1.23456 \div 10^{-3} = 0.00123456$

ตัวอย่างที่ 5.16 จงคำนวณหาค่า $(2.30 \times 10^4) + (3.70 \times 10^4)$

วิธีทำ

นำจำนวนบวกกันโดยที่เลขยกกำลังฐาน 10 เท่ากันเลขชี้กำลังเท่ากันสามารถดึงตัวร่วมนี้ออกมาได้

$$\text{จาก } (2.30 \times 10^4) + (3.70 \times 10^4) = (2.30 + 3.70) \times 10^4$$

$$= 6.00 \times 10^4$$

เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก 4 แสดงว่าเลื่อนจุดไปทางขวามือ 4 ตำแหน่ง

$$= 60000 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 5.17 จงคำนวณหาค่า $(5.30 \times 10^3) + (2.70 \times 10^{-2})$

วิธีทำ

เลขยกกำลังฐาน 10 แต่เลขชี้กำลังไม่เท่ากันไม่สามารถดึงตัวร่วมออกได้ ใช้วิธีการทำให้เป็นจำนวนเต็มจำนวน 5.30×10^3 เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก 3 แสดงว่าเลื่อนจุดไปทางขวามือ 3 ตำแหน่ง

จำนวน 2.70×10^{-2} เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มลบ -2 แสดงว่าเลื่อนจุดไปทางซ้ายมือ 2 ตำแหน่ง

$$\text{จาก } (5.30 \times 10^3) + (2.70 \times 10^{-2}) = 5300.000 + 0.027$$

$$= 5300.027 \quad \text{ตอบ}$$

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูอธิบายเกี่ยวกับสาระสำคัญและจุดประสงค์การเรียนรู้
2. นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนหน่วยการเรียนรู้ที่ 5

ขั้นสอน

3. ครูอธิบายเนื้อหาและให้ความรู้ ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 5 พื้นฐานเลขยกกำลัง รากและกรณฑ์
4. นักเรียนทำแบบทดสอบหน่วยที่ 5 ในหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ช่วงโยธา

ขั้นสรุปและการประยุกต์

5. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบประเมินผลการเรียนรู้บทที่ 5 พร้อมกับสรุปบทเรียนร่วมกัน

6. สื่อการเรียนรู้

เอกชัย รัตนโน. คณิตศาสตร์ช่วงโยธา (Mathematics for Civil Work) รหัสวิชา 20121-1001, พิมพ์และจัดจำหน่ายโดย บริษัท ซีเอ็ดดูเคชั่น จำกัด (มหาชน), พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2565

7. การวัดผลประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 5
3. สังเกตและประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 5
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยอาจารย์และนักศึกษา ร่วมกันประเมิน

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล เกณฑ์ผ่าน ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 5 เกณฑ์ผ่าน ทำถูกต้อง 60% ขึ้นไป
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับ การประเมินตามสภาพจริง

8. กิจกรรมเสนอแนะ/งานที่มอบหมาย

8.1 กิจกรรมเสนอแนะ

- 8.1.1 ให้นักศึกษาค้นคว้าหาข้อมูลเพิ่มเติม นอกเหนือจากเนื้อหาบทเรียนที่เรียนมาทางอินเทอร์เน็ต
- 8.1.2 ให้นักศึกษาสังเกตสิ่งรอบตัว ทั้งในวิทยาลัยฯ และภายนอก ว่ามีสิ่งใดบ้างที่สัมพันธ์กับเนื้อหาบทเรียนที่เรียนมา

8.2 งานที่มอบหมาย

ทำในหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ช่วงก่อสร้าง บทที่ 5 พื้นฐานเลขยกกำลัง รากและกรณฑ์

- 8.2.1 แบบทดสอบก่อนเรียนบทที่ 5 พื้นฐานเลขยกกำลัง รากและกรณฑ์
- 8.2.2 แบบประเมินผลการเรียนรู้บทที่ 5 พื้นฐานเลขยกกำลัง รากและกรณฑ์
- 8.2.3 แบบทดสอบหลังเรียนบทที่ 5 พื้นฐานเลขยกกำลัง รากและกรณฑ์

9. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

1. ผลการใช้แผนการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

2. ผลการเรียนรู้ของนักเรียน/ผลการสอนของครู/ปัญหาที่พบ

.....

.....

.....

.....

3. แนวทางการแก้ปัญหา

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ตัวแทนนักเรียน

ลงชื่อ.....

(.....)

ครูผู้สอน

การประเมินผล บทที่ 5 พื้นฐานเลขยกกำลัง รากและกรณฑ์

คำชี้แจง : คะแนนรวมต่อบท 100 คะแนนเต็ม

1. แบบฝึกหัด จำนวน 10 ข้อ ข้อละ คะแนน รวม คะแนน
2. แบบประเมินผลก่อนและหลังการเรียนรู้ จำนวน 10 ข้อ ข้อละ คะแนน รวม คะแนน
3. ประเมินจิตพิสัยตามสภาพจริง 20 คะแนน

แบบวัดผล บทที่ 5 พื้นฐานเลขยกกำลัง รากและกรณฑ์						
ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา รหัสวิชา 20121-1001				วิทยาลัย		
ชื่อ-สกุล..... ระดับ.....				ครู		
ที่	รายการประเมิน	คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน		คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน		คะแนนแบบฝึกหัด
		คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	
1	พื้นฐานเลขยกกำลัง					
2	เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเศษส่วน					
3	รากที่ 2 ของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปของกรณฑ์					
4	การคูณและการหารจำนวนเต็มโดยเลขยกกำลังฐาน 10					
5						
6						
รวมคะแนนด้านทักษะ		10		10		60
13	ความขยันหมั่นเพียร ความวิริยะอุตสาหะ					10
14	ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์สุจริต					10
รวมคะแนนทั้งหมด				100		รวม

	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6	หน่วยที่ 6
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา	เวลาเรียนรวม 36 ชม.
	ชื่อหน่วย บทที่ 6 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง	สอนครั้งที่ 11-12/18
ชื่อเรื่อง ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง		จำนวน 4 คาบ

1. สารสำคัญ

ฟังก์ชันเลขชี้กำลังเขียนอยู่ในรูปทั่วไป โดยกราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลังจะมี 2 ลักษณะ ได้แก่ ฟังก์ชันเพิ่ม (Increasing Function) และ ฟังก์ชันลด (Decreasing Function)

เลขยกกำลัง (Power) ที่มีเนื้อหาเกี่ยวกับการคำนวณทางคณิตศาสตร์สำหรับช่างโยธา (Civil Work) เลขชี้กำลัง (Exponential) จะอยู่ในรูปตัวแปร เช่น สมการเลขชี้กำลัง (Exponents Equation)

กรณฑ์ (Square Root) คือเครื่องหมายทางคณิตศาสตร์ในรูปสัญลักษณ์ $\sqrt{\quad}$ เช่น $\sqrt{a}$ อ่านว่า กรณฑ์ของ a (Square Root of a) สำหรับสัญลักษณ์ของกรณฑ์ในรูปของ $\sqrt[n]{a}$ อ่านว่า กรณฑ์ที่ n ของ a

2. สารการเรียนรู้

1. ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง
2. เลขชี้กำลังที่อยู่ในรูปของตัวแปร
3. การดำเนินการของเลขชี้กำลัง
4. สมการเลขชี้กำลัง
5. การแยกตัวประกอบของพหุนาม
6. รากที่ n ที่อยู่ในรูปของกรณฑ์
7. การดำเนินการรากที่ n ที่อยู่ในรูปของกรณฑ์

3. จุดประสงค์การเรียนรู้

จุดประสงค์ทั่วไป

เพื่อให้มีความเข้าใจฟังก์ชันเลขชี้กำลัง กราฟ เลขชี้กำลังที่อยู่ในรูปของตัวแปร การดำเนินการของเลขชี้กำลัง แก้ปัญหาสมการเลขชี้กำลังได้ แยกตัวประกอบของพหุนามเพื่อนำมาใช้แก้สมการได้ หารากที่ 2 และรากที่ n ของจำนวนที่อยู่ในรูปของกรณฑ์ การดำเนินการของกรณฑ์ ประยุกต์ความรู้ที่ได้นำไปใช้ในงานช่างโยธาได้

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เข้าใจฟังก์ชันเลขชี้กำลังและนำไปแปรผลเป็นกราฟได้ถูกต้อง
2. เข้าใจเลขชี้กำลังที่อยู่ในรูปของตัวแปรใช้การดำเนินการของเลขชี้กำลังแก้ปัญหาได้ถูกต้อง
3. แก้ปัญหาสมการเลขชี้กำลังได้ แยกตัวประกอบของพหุนามเพื่อนำมาใช้แก้สมการได้ถูกต้อง
4. หารากที่ 2 และรากที่ n ของจำนวนที่อยู่ในรูปของกรณฑ์ได้ถูกต้อง
5. ใช้หลักการดำเนินการของกรณฑ์ เพื่อนำมาแก้ปัญหาได้ถูกต้อง
6. นำความรู้เกี่ยวกับสมการเลขชี้กำลัง การหารากของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์ ใช้ในงานช่างโยธาได้อย่างถูกต้อง

4. สารการเรียนรู้

4.1 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Exponential Function)

ฟังก์ชันเลขชี้กำลังเขียนอยู่ในรูปทั่วไป $y = a^x$

โดยนิยามของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง กำหนดให้ X เป็นตัวแปรต้น y เป็นตัวแปรตาม และ a เป็นค่าคงที่ โดยเงื่อนไข a ต้องมากกว่า 0 และต้องไม่เท่า 1 หรือ $a > 0, a \neq 1$

ทั่วไป การเขียนฟังก์ชันจะอยู่ในรูปของ $y = f(x)$ แต่บางกรณีอาจใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษอื่น ๆ ตัวอย่างเช่น

ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $y = 3^x$ เขียนแทนด้วย $f(x) = 3^x$ โดยให้ $y = f(x)$

ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $y = 4^x$ เขียนแทนด้วย $g(x) = 4^x$ โดยให้ $y = g(x)$

ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $s = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ เขียนแทนด้วย $F(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ โดยให้ $s = F(t)$

กราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลังจะมี 2 ลักษณะซึ่งขึ้นอยู่กับสมบัติของฟังก์ชันเลขยกกำลัง อธิบายดังนี้

ลักษณะที่ 1 ฟังก์ชันเพิ่ม (Increasing Function) เมื่อ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ ถ้าตัวแปรต้น x มีค่าเพิ่มขึ้นแล้วตัวแปรตาม y มีค่าเพิ่มขึ้นด้วยเสมอ

4.2 เลขชี้กำลังที่อยู่ในรูปของตัวแปร (The Exponent is in the Form of Variable)

เลขยกกำลัง (Power) ที่มีเนื้อหาเกี่ยวกับการคำนวณทางคณิตศาสตร์สำหรับช่างโยธา (Civil Work) จะเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันเลขชี้กำลังดังที่อธิบายมาแล้ว เลขชี้กำลัง (Exponent) จะเป็นตัวแปร โดยจะใช้ตัวอักษรตัวพิมพ์เล็กภาษาอังกฤษ เช่น a, b, x, y, z, t, u, v เป็นต้น

สำหรับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นตัวแปร ตัวอย่าง

$$16^{2x} = \text{อ่านว่า สิบหกกำลังสองเอกซ์}$$

โดยที่ จำนวน $2x$ หมายถึง เลขชี้กำลัง (Exponent) อยู่ในรูปของตัวแปร

จำนวน 16 หมายถึง ฐาน (Base)

หรือบางกรณีเลขฐานอาจอยู่ในรูปของเลขยกกำลัง

4.3 การดำเนินการของเลขชี้กำลัง (Operation of Exponents)

การดำเนินการของเลขชี้กำลัง (Operation of Exponents) โดยการบวก ลบ คูณ หารจะใช้สมบัติของเลขชี้กำลังที่กำหนดให้ a, b, x, y แทนจำนวนจริงใด ๆ ยกเว้น 0 สมบัติของเลขชี้กำลังต่อไปนี้เป็นจริงเสมอ แสดงดังตารางที่ 6.1

ตารางที่ 6.1 สมบัติของเลขชี้กำลัง

1	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	5	$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
2	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ หรือ $\frac{a^x}{a^y} = \frac{1}{a^{y-x}}$	6	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ หรือ $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$
3	$(a^x)^y = a^{xy}$	7	$a^0 = 1$
4	$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$		

สมบัติของเลขชี้กำลังจะใช้ในการแก้ปัญหาของปริมาณที่มีเลขชี้กำลังซับซ้อน เลขยกกำลังที่มีฐานเป็นตัวแปร เลขชี้กำลังอยู่ในรูปของสมการ เป็นต้น

4.4 สมการเลขชี้กำลัง (Exponential Equation)

สมการเลขชี้กำลัง (Exponential Equation) คือสมการที่อยู่ในรูปตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง การแก้สมการเลขชี้กำลังจะใช้สมบัติของการเท่ากันที่อธิบายไว้ในบทที่ 2 ร่วมกับสมบัติของเลขยกกำลังที่แสดงไว้ในตารางที่ 6.1

4.5 การแยกตัวประกอบของพหุนาม (Factorization of Polynomials)

การแยกตัวประกอบของพหุนาม (Factorization of Polynomials) คือการแยกย่อยของปริมาณพหุนามให้อยู่ในรูปของผลคูณของจำนวนอื่นหรือเรียกว่า ตัวประกอบ ซึ่งเมื่อทำการคูณตัวประกอบที่แยกออกมาเข้าด้วยกันจะได้ผลลัพธ์เป็นปริมาณพหุนามเดิม โดยในบทเรียนนี้จะอธิบายการแยกตัวประกอบของสมการที่อยู่ในรูปสมการกำลังสองหรือ

$$\text{รูปสมการที่หนึ่ง} \quad x^2 \pm bx \pm c = (x \pm m)(x \pm n)$$

โดยต้องอยู่ในเงื่อนไข

$$1. m + n = b$$

$$2. m \times n = c$$

$$3. x \times x = x^2$$

โดยที่ $a, b, c, m,$ และ n เป็นค่าคงที่ และ $a, b, c,$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เท่ากับ 0

4.6 รากที่ n ที่อยู่ในรูปของกรณฑ์ (The n^{th} Root in the form of Square Root)

สำหรับการหารากที่ n ของจำนวนจริงใดๆ ที่เขียนอยู่ในรูปของกรณฑ์นั้น จะเขียนสัญลักษณ์ของกรณฑ์ในรูปของ

$$\sqrt[n]{a} \text{ อ่านว่า กรณฑ์ที่ } n \text{ ของ } a$$

โดยที่ a เป็นจำนวนเต็ม และ n คือเลขชี้กำลังที่เป็นตัวส่วน ดังนั้นเราสามารถเขียนเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะให้อยู่ในรูปของเครื่องหมายกรณฑ์ได้ว่า

$$a^{\frac{1}{n}} \text{ เขียนอยู่ในรูปของเครื่องหมายกรณฑ์ได้ว่า } \sqrt[n]{a}$$

หรือเราจะเขียนกรณฑ์ที่ n ของ a ให้อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

$$\sqrt[n]{a} \text{ เขียนอยู่ในรูปของเลขยกกำลัง } a^{\frac{1}{n}}$$

การหาค่าของรากที่ n ที่อยู่ในรูปของกรณฑ์ จะอยู่ภายใต้เงื่อนไขที่เป็นจริงดังต่อไปนี้

1. ถ้า $a = 0$ ในการหากรณฑ์ที่ n ของ a คำตอบจะเท่ากับศูนย์
2. ถ้า $a \neq 0$ แบ่งออกเป็น 2 กรณี
 - 2.1 ถ้า $a > 0$ ในการหากรณฑ์ที่ n ของ a คำตอบจะเป็นค่าบวก
 - 2.2 ถ้า $a < 0$ ในการหากรณฑ์ที่ n ของ a คำตอบจะขึ้นอยู่กับ n
 - 2.2.1 ถ้า n เป็นเลขคู่ คำตอบนิยามเป็นจำนวนจริงไม่ได้
 - 2.2.2 ถ้า n เป็นเลขคี่ คำตอบจะเป็นค่าลบ

4.7 การดำเนินการรากที่ n ที่อยู่ในรูปของกรณฑ์ (The n^{th} Root Operation in the Form of Square Root)

การดำเนินการรากที่ n ของจำนวนจริงที่เขียนอยู่ในรูปของกรณฑ์นั้น โดยการบวก ลบ คูณ หารจะใช้สมบัติ รากที่ n กำหนดให้ a, b แทนจำนวนจริงบวกและ n, m แทนจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 สมบัติต่อไปนี้เป็นจริงเสมอ แสดงดังตารางที่ 6.2

อนึ่ง ในการหารประมาณการบวก ลบ คูณ หารของจำนวนที่เขียนอยู่ในรูปของเครื่องหมายกรณฑ์ กรณฑ์จะต้องเป็นกรณฑ์ที่มีอันดับเดียวกันหรือ n เท่ากันจึงจะดำเนินการต่อกันได้ แต่ถ้าสามารถคำนวณหาออกมาเป็นจำนวนจริงได้ (คือไม่ติดอยู่ในเครื่องหมายกรณฑ์) จำนวนแต่ละจำนวนสามารถดำเนินการต่อกันได้

ตารางที่ 6.2 สมบัติของรากที่ n ที่เขียนอยู่ในรูปเครื่องหมายกรณฑ์

1	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	5	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$
2	$\sqrt[n]{a^n} = a$	6	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
3	$\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$	7	$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$
4	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$		

ตัวอย่างที่ 6.1 จงคำนวณหาปริมาณ $32^{\frac{1}{5}}$ และ $\sqrt[5]{32}$

เขียนอยู่ในรูป $32^{\frac{1}{5}} = b$ หรือ $32 = b^5$

หาจำนวนใดๆ ที่คูณซ้ำจำนวนตัวเอง 5 ตัวแล้วมีค่าเท่ากับ 32

เลือกค่า $b = 2$; $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

เนื่องจาก n เป็นจำนวนคี่ จะมีรากซึ่งเป็นคำตอบจำนวนเดียว

ดังนั้น $(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)^{\frac{1}{5}} = b$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

$$32^{\frac{1}{5}} = 2 \text{ หรือรากที่ 5 ของจำนวน 32 เท่ากับ 2 } \text{ตอบ}$$

หาจำนวน กรณฑ์ที่ 5 ของ 32 ; $\sqrt[5]{32} = \sqrt{b \times b \times b \times b \times b} = b$

หาจำนวนใด ๆ ที่คูณซ้ำจำนวนตัวเอง 5 ตัวแล้วมีค่าเท่ากับ 32

เลือกค่า $b = 2$; $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

$$\sqrt[5]{32} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 2 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 6.2 จงคำนวณหาปริมาณ $\sqrt[3]{216} + \sqrt{50} - \sqrt[4]{42^4}$

วิธีทำ

คำนวณหาค่าในแต่ละกรณฑ์

จาก $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

จำนวนที่หนึ่ง $\sqrt[3]{216} = 216^{\frac{1}{3}}$ หาค่าได้จาก $(6 \times 6 \times 6) = 6^3$ หรือ $216^{\frac{1}{3}} = 6$

จำนวนที่สอง $\sqrt{50} = 50^{\frac{1}{2}}$ คำตอบประมาณได้ที่ $(7 \times 7) = 49$ ต้องหาค่าต่อไปซึ่งเป็นการเสียเวลาดังนั้นจะหารากที่สองจากวิธีการของจำนวนเต็มบวกที่อยู่ในเครื่องหมายกรณฑ์

จาก $\sqrt{50} = \sqrt{b \times b} = b$

$$\sqrt{50} = \sqrt{5 \times 5 \times 2}$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{5^2 \times 2}$$

ใช้คุณสมบัติข้อที่ 2 ของตารางที่ 6.2 ทำให้จำนวน 5 ถูกถอดออกจากเครื่องหมายกรณฑ์ได้

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

จำนวนที่สาม $\sqrt[4]{42^4} = 42^{\frac{4}{4}} = 42$

ดังนั้น $\sqrt[3]{216} + \sqrt{50} - \sqrt[4]{42^4} = 6 + 5\sqrt{2} - 42$
 $= 5\sqrt{2} - 36$

ตอบ

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูอธิบายเกี่ยวกับสาระสำคัญและจุดประสงค์การเรียนรู้
2. นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนหน่วยการเรียนรู้ที่ 6

ขั้นสอน

3. ครูอธิบายเนื้อหาและให้ความรู้ ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 6 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง
4. นักเรียนทำแบบทดสอบหน่วยที่ 6 ในหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ช่วงโยธา

ขั้นสรุปและการประยุกต์

5. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบประเมินผลการเรียนรู้บทที่ 6 พร้อมกับสรุปบทเรียนร่วมกัน

6. สื่อการเรียนรู้

เอกชัย รัตนโน. คณิตศาสตร์ช่วงโยธา (Mathematics for Civil Work) รหัสวิชา 20121-1001, พิมพ์และจัดจำหน่ายโดย บริษัท ซีเอ็ดดูเคชั่น จำกัด (มหาชน), พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2565

7. การวัดผลประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 6
3. สังเกตและประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 6
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยอาจารย์และนักศึกษา ร่วมกันประเมิน

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล เกณฑ์ผ่าน ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 6 เกณฑ์ผ่าน ทำถูกต้อง 60% ขึ้นไป
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับ การประเมินตามสภาพจริง

8. กิจกรรมเสนอแนะ/งานที่มอบหมาย

8.1 กิจกรรมเสนอแนะ

- 8.1.1 ให้นักศึกษาค้นคว้าหาข้อมูลเพิ่มเติม นอกเหนือจากเนื้อหาบทเรียนที่เรียนมาทางอินเทอร์เน็ต
- 8.1.2 ให้นักศึกษาสังเกตสิ่งรอบตัว ทั้งในวิทยาลัยฯ และภายนอก ว่ามีสิ่งใดบ้างที่สัมพันธ์กับเนื้อหาบทเรียนที่เรียนมา

8.2 งานที่มอบหมาย

- ทำในหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ช่วงโยธา บทที่ 6 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง
- 8.2.1 แบบทดสอบก่อนเรียนบทที่ 6 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง
 - 8.2.2 แบบประเมินผลการเรียนรู้บทที่ 6 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง
 - 8.2.3 แบบทดสอบหลังเรียนบทที่ 6 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

9. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

1. ผลการใช้แผนการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

2. ผลการเรียนรู้ของนักเรียน/ผลการสอนของครู/ปัญหาที่พบ

.....

.....

.....

.....

3. แนวทางการแก้ปัญหา

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ตัวแทนนักเรียน

ลงชื่อ.....

(.....)

ครูผู้สอน

การประเมินผล บทที่ 6 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

คำชี้แจง : คะแนนรวมต่อบท 100 คะแนนเต็ม

1. แบบฝึกหัด จำนวน 10 ข้อ ข้อละ คะแนน รวม คะแนน
2. แบบประเมินผลก่อนและหลังการเรียนรู้ จำนวน 10 ข้อ ข้อละ คะแนน รวม คะแนน
3. ประเมินจิตพิสัยตามสภาพจริง 20 คะแนน

แบบวัดผล							
บทที่ 6 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง							
ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา รหัสวิชา 20121-1001					วิทยาลัย		
ชื่อ-สกุล..... ระดับ.....					ครู		
ที่	รายการประเมิน	คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน		คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน		คะแนนแบบฝึกหัด	
		คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้		
1	ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง						
2	เลขชี้กำลังที่อยู่ในรูปของตัวแปร						
3	การดำเนินการของเลขชี้กำลัง						
4	สมการเลขชี้กำลัง						
5	การแยกตัวประกอบของพหุนาม						
6	รากที่ n ที่อยู่ในรูปของกรณฑ์						
7	การดำเนินการรากที่ n ที่อยู่ในรูปของกรณฑ์						
8							
9							
10							
11							
12							
รวมคะแนนด้านทักษะ		10		10		60	
13	ความขยันหมั่นเพียร ความวิริยะอุตสาหะ					10	
14	ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์สุจริต					10	
รวมคะแนนทั้งหมด				100		รวม	

	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7	หน่วยที่ 7
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา	เวลาเรียนรวม 36 ชม.
	ชื่อหน่วย บทที่ 7 ฟังก์ชันลอการิทึม	สอนครั้งที่ 13-14/18
ชื่อเรื่อง ฟังก์ชันลอการิทึม		จำนวน 4 คาบ

1. สารสำคัญ

ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic Function) โดยนิยาม เป็นฟังก์ชันผกผัน (Inverse Function) ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังเขียนอยู่ในรูปทั่วไป และกราฟของฟังก์ชันลอการิทึมจะแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือ ฟังก์ชันเพิ่ม (Increasing Function) และฟังก์ชันลด (Decreasing Function)

ลอการิทึมสามัญ (Common Logarithm) โดยนิยาม คือลอการิทึมฐาน 10 เขียนได้ว่า $\log x$ ในการหาค่าโดยใช้ค่าในตารางจะต้องเปลี่ยนรูปของ $\log x$ อยู่ในรูป $\log N$ โดย N เป็นจำนวนจริงบวก ในการหาค่าของ $\log N$ จะต้องเปลี่ยน N ให้อยู่ในรูป $\log N = \log N_0 + n$ ลอการิทึมธรรมชาติ (Natural Logarithm) โดยนิยาม คือลอการิทึมฐาน e เขียนได้ว่า $\ln N$ การแก้สมการลอการิทึมคือการหาค่าตัวแปรในสมการ โดยใช้สมบัติของลอการิทึม เลขชี้กำลังและการเท่ากัน

2. สารการเรียนรู้

1. ฟังก์ชันลอการิทึม
2. การดำเนินการของลอการิทึม
3. กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม
4. ลอการิทึมสามัญ
5. ค่าลอการิทึมสามัญจากตาราง
6. ลอการิทึมธรรมชาติ
7. สมการลอการิทึม

3. จุดประสงค์การเรียนรู้

จุดประสงค์ทั่วไป

เพื่อให้มีความเข้าใจฟังก์ชันลอการิทึม การดำเนินการของฟังก์ชัน เขียนกราฟของฟังก์ชัน ลอการิทึมสามัญ การหาค่าลอการิทึมสามัญจากตาราง การหาค่าลอการิทึมธรรมชาติ แก้สมการลอการิทึม ประยุกต์ความรู้ที่ได้นำไปใช้ในงานช่างโยธาได้

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เข้าใจฟังก์ชันลอการิทึมและเขียนกราฟของฟังก์ชันได้ถูกต้อง
2. เข้าใจการดำเนินการของฟังก์ชันและนำไปใช้ในการคำนวณเกี่ยวกับลอการิทึมได้ถูกต้อง
3. คำนวณหาค่าลอการิทึมสามัญ และใช้ตารางในการหาค่าได้ถูกต้อง
4. คำนวณหาค่าลอการิทึมธรรมชาติได้ถูกต้อง
5. คำนวณหาค่าตัวแปรของสมการลอการิทึมได้ถูกต้อง
6. นำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันลอการิทึม กราฟ ลอการิทึมสามัญ ลอการิทึมธรรมชาติและแก้สมการลอการิทึมประยุกต์ใช้ในงานช่างโยธาได้อย่างถูกต้อง

4. สารการเรียนรู้

4.1 ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic Function)

นิยาม ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic Function) เป็นฟังก์ชันผกผัน (Inverse Function) ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Exponential Function)

ฟังก์ชันเลขชี้กำลังเขียนอยู่ในรูปทั่วไป $y = a^x$ โดยนิยามของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

กำหนดให้ x เป็นตัวแปรต้น (จำนวนจริงใด ๆ)

y เป็นตัวแปรตาม (จำนวนจริงบวก)

a เป็นค่าคงที่ โดยเงื่อนไข $a > 0, a \neq 1$

ฟังก์ชันฟังก์ชันลอการิทึมเขียนอยู่ในรูปทั่วไป $x = a^y$ โดยนิยามของฟังก์ชันลอการิทึม

กำหนดให้ x เป็นตัวแปรต้น (จำนวนจริงบวก)

y เป็นตัวแปรตาม (จำนวนจริงใด ๆ)

a เป็นค่าคงที่ โดยเงื่อนไข $a > 0, a \neq 1$

จากฟังก์ชัน $y = f(x)$ ดังนั้นฟังก์ชันลอการิทึม $x = a^y$ จะกำหนดให้เขียนในรูปของ

$$y = \log_a x \quad \text{โดยเงื่อนไข } a > 0, a \neq 1$$

หรือ $f(x) = \log_a x$ เรียกว่าฟังก์ชันลอการิทึมฐาน a

โดยฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $a^y = x$ เขียนในรูปของฟังก์ชันลอการิทึมได้ว่า $y = \log_a x$

แปลความหมายได้ว่า เลขชี้กำลัง y ในฟังก์ชันเลขชี้กำลัง มีค่าเท่ากับ ลอการิทึม ของจำนวน x ฐาน a (เรียกว่า y เท่ากับ $\log x$ ฐาน a)

4.2 การดำเนินการของลอการิทึม (Logarithmic Operations)

การดำเนินการของลอการิทึม (Logarithmic Operations) โดยการบวก ลบ คูณ หารจะใช้สมบัติของลอการิทึม โดยกำหนดให้ $x > 0, y > 0, a > 0$ และ $a \neq 1$ สมบัติของลอการิทึมต่อไปนี้เป็นจริงเสมอ แสดงดังตารางที่ 7.1

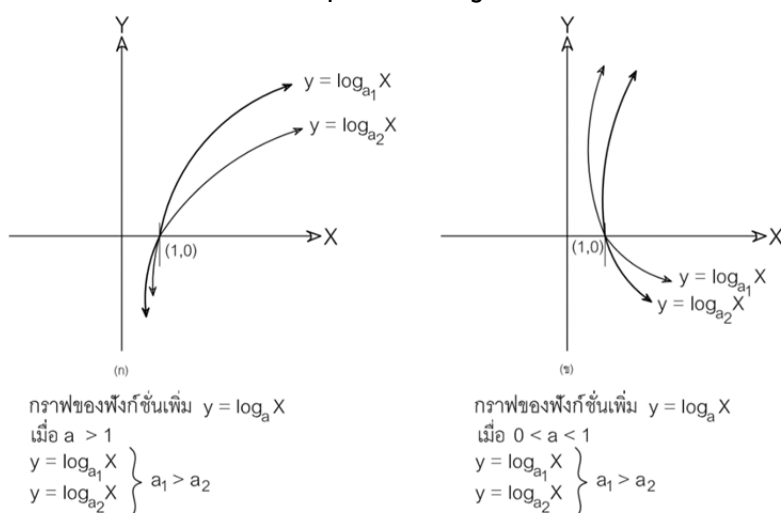
ตารางที่ 7.1 สมบัติของลอการิทึม

1	$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$	6**	$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$
2	$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	7***	$\log_a nx = \frac{1}{n} \log_a x$
3*	$\log_a x^n = n \log_a x$	8	$\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$
4	$\log_a a = 1$	9****	$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$
5	$\log_a 1 = 0$	10	$a^{\log_a x} = x$

* เมื่อ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ

** เมื่อ $x > 0$ และ $c \neq 0$ *** เมื่อ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $n \neq 0$ **** เมื่อ $x \neq 0$

4.3 กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม (Graph of a Logarithmic Function)



รูปที่ 7.1

กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม (Graph of Logarithmic Function) จะมี 2 ลักษณะซึ่งขึ้นอยู่กับสมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม อธิบายดังนี้

ลักษณะที่ 1 ฟังก์ชันเพิ่ม (Increasing Function) $y = \log_a x$ เมื่อ $a > 1$

ลักษณะที่ 2 ฟังก์ชันลด (Decreasing Function) $y = \log_a x$ เมื่อ $0 < a < 1$

ข้อสังเกตที่ได้จากกราฟ

กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม ทั้งฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด จะต้องตัดแกน x ที่ตำแหน่งจุด 1

อยู่เสมอ

4.4 ลอการิทึมสามัญ (Common Logarithm)

ลอการิทึมสามัญ (Common Logarithm) โดยนิยาม คือลอการิทึมฐาน 10 เขียนได้ว่า $\log_{10} x$ แต่ในการนำไปใช้จะนิยมเขียนในรูป

$\log x$ ซึ่งจะเข้าใจกันโดยทั่วไปว่าเป็นรูปทั่วไปของลอการิทึมฐาน 10 ตัวอย่างเช่น

$$\log_{10} 15 \quad \text{เขียนเป็นรูปทั่วไปได้} \quad \log 15$$

$$\log_{10} \frac{4}{7} \quad \text{เขียนเป็นรูปทั่วไปได้} \quad \log \frac{4}{7}$$

$$\log_{10} 28 \quad \text{เขียนเป็นรูปทั่วไปได้} \quad \log 28$$

4.5 ค่าลอการิทึมสามัญจากตาราง (Common Logarithm Values from the Table)

ในการหาค่าลอการิทึมสามัญ (Common Logarithm) ในกรณีใช้ค่าในตารางลอการิทึมสามัญ (ตารางแสดงไว้ในภาคผนวก) เราจะต้องเปลี่ยนรูปของ $\log x$ อยู่ในรูป $\log N$ โดย N เป็นจำนวนจริงบวก ในการหาค่าของ $\log N$ จะต้องเปลี่ยน N ให้อยู่ในรูปของสัญกรณ์ทางวิทยาศาสตร์

$$N = N_0 \times 10^n \quad \text{โดยเงื่อนไข } 1 \leq N_0 < 10$$

$$\log N = \log(N_0 \times 10^n)$$

$$\text{สมบัติข้อที่ 1} \quad \log N = \log N_0 + \log 10^n$$

$$\text{สมบัติข้อที่ 3} \quad \log N = \log N_0 + n \log 10$$

$$\text{สมบัติข้อที่ 4} \quad \log N = \log N_0 + n(1)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \log N = \log N_0 + n$$

โดยที่ N มีค่าเป็นบวก เรียกว่า แอนติลอการิทึม (Antilogarithm) ของ $\log N$
 $\log N_0$ มีค่าเป็นทศนิยมมีค่ามากกว่า 0 และน้อยกว่า 1 เรียกว่า แมนทิสซา

(Mantissa) ของ $\log N$

n เป็นจำนวนเต็ม เรียกว่า แครกเทอริสติก (Characteristic) ของ $\log N$

ในการหาค่าลอการิทึมสามัญโดยใช้ค่าจากตาราง เราจะนำค่าแมนทิสซา หรือ ค่า $\log N_0$ ไปหาค่าจากตาราง เมื่อได้ค่ามาแล้วจะนำมารวมกับค่า แครกเทอริสติก หรือ n ก็จะเป็นค่าของ $\log N$

4.6 ลอการิทึมธรรมชาติ (Natural Logarithm)

ลอการิทึมธรรมชาติ (Natural Logarithm) โดยนิยาม คือลอการิทึมฐาน e เขียนได้ว่า $\log_e N$ แต่ในการนำไปใช้จะกำหนดให้เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$\ln N$ ซึ่งจะเข้าใจกันโดยทั่วไปว่าเป็นรูปทั่วไปของลอการิทึมฐาน e

อนึ่ง ค่า e เป็นค่าคงตัวสำหรับคณิตศาสตร์ประยุกต์ มีค่าโดยประมาณ $e = 2.7183$

การคำนวณหาค่าลอการิทึมธรรมชาติหรือ $\ln N$ มี 2 วิธีการ อธิบายดังนี้

วิธีที่ 1 ใช้คุณสมบัติของลอการิทึม โดยทำลอการิทึมธรรมชาติให้อยู่ในรูปของลอการิทึมสามัญ

$$\ln N = \frac{\log N}{\log e}$$

$$\ln N = \left(\frac{1}{\log e} \right) \log N$$

โดยที่ $\frac{1}{\log e}$ มีค่าโดยประมาณ 2.3026

ดังนั้น $\ln N = 2.3026 \log N$

วิธีที่ 2 ใช้ตารางลอการิทึมธรรมชาติ (ตารางแสดงไว้ในภาคผนวก)

จาก $\ln N$ โดย N เป็นจำนวนจริงบวก ในการหาค่าของ $\ln N$ จะต้องเปลี่ยน N ให้อยู่ในรูปของสัญกรณ์ทางวิทยาศาสตร์

$$N = N_0 \times 10^n \quad \text{โดยเงื่อนไข } 1 \leq N_0 < 10$$

$$\ln N = \ln(N_0 \times 10^n)$$

$$\text{สมบัติข้อที่ 1} \quad \ln N = \ln N_0 + \ln 10^n$$

$$\text{สมบัติข้อที่ 3} \quad \ln N = \ln N_0 + n \ln 10$$

อนึ่ง ในการแก้ปัญหาลอการิทึมธรรมชาติสามารถใช้สมบัติของลอการิทึมได้ทุกประการ

4.7 สมการลอการิทึม (Logarithmic Equations)

การแก้สมการลอการิทึม (Logarithmic Equations) คือการหาค่าตัวแปรในสมการ โดยใช้สมบัติของลอการิทึม สมบัติของเลขชี้กำลังและสมบัติการเท่ากัน ที่ได้อธิบายไว้ในบทก่อนหน้านี้นี้จะช่วย

ตัวอย่างที่ 7.22 จากปริมาณ $\log(4x + 2) = 3$ จงหาค่าตัวแปร

วิธีทำ

$$\log(4x + 2) = 3$$

เขียนอยู่ในรูปของเลขยกกำลัง

$$4x + 2 = 10^3$$

$$4x = (10 \times 10 \times 10) - 2$$

$$x = \frac{998}{4}$$

$$x = 249.5$$

ตอบ

ตรวจคำตอบ

$$\log [4(249.5) + 2] = 3$$

$$\log 1000 = 3$$

$$\log (10 \times 10^2) = 3$$

$$\log 10 + 2 \log 10 = 3$$

$$1 + 2(1) = 3$$

$$3 = 3 \quad \text{สมการเป็นจริง}$$

ตัวอย่างที่ 7.23 จากปริมาณ $\log_6 (x+4) + \log_6 (x-4) = 2$ จงหาค่าตัวแปร

วิธีทำ

สมบัติลอการิทึมข้อ 1

$$\log_6 (x+4)(x-4) = 2$$

เขียนอยู่ในรูปของเลขยกกำลัง

$$(x+4)(x-4) = 6^2$$

$$x^2 - 16 = 36$$

$$x^2 = 36 + 16$$

$$x = \sqrt{52}$$

$$x = \sqrt{2 \times 2 \times 13}$$

$$x = 2\sqrt{13}$$

ตอบ

ตรวจคำตอบ

$$\log_6 (2\sqrt{13} + 4) + \log_6 (2\sqrt{13} - 4) = 2$$

$$\log_6 (2\sqrt{13} + 4)(2\sqrt{13} - 4) = 2$$

$$\log_6 [(2\sqrt{13} \times 2\sqrt{13}) - 16] = 2$$

$$\log_6 [(4\sqrt{13 \times 13}) - 16] = 2$$

$$\log_6 [(4 \times 13) - 16] = 2$$

$$\log_6 [52 - 16] = 2$$

$$\log_6 36 = 2$$

$$36 = 6^2$$

$$36 = 36 \quad \text{สมการเป็นจริง}$$

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูอธิบายเกี่ยวกับสาระสำคัญและจุดประสงค์การเรียนรู้
2. นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนหน่วยการเรียนรู้ที่ 7

ขั้นสอน

3. ครูอธิบายเนื้อหาและให้ความรู้ ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 7 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง
4. นักเรียนทำแบบทดสอบหน่วยที่ 7 ในหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ช่วงโยธา

ขั้นสรุปและการประยุกต์

5. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบประเมินผลการเรียนรู้บทที่ 7 พร้อมกับสรุปบทเรียนร่วมกัน

6. สื่อการเรียนรู้

เอกชัย รัตนโน. คณิตศาสตร์ช่วงโยธา (Mathematics for Civil Work) รหัสวิชา 20121-1001, พิมพ์และจัดจำหน่ายโดย บริษัท ซีเอ็ดดูเคชั่น จำกัด (มหาชน), พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2565

7. การวัดผลประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 7
3. สังเกตและประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 7
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยอาจารย์และนักศึกษา ร่วมกันประเมิน

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล เกณฑ์ผ่าน ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 7 เกณฑ์ผ่าน ทำถูกต้อง 60% ขึ้นไป
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับ การประเมินตามสภาพจริง

8. กิจกรรมเสนอแนะ/งานที่มอบหมาย

8.1 กิจกรรมเสนอแนะ

8.1.1 ให้นักศึกษาค้นคว้าหาข้อมูลเพิ่มเติม นอกเหนือจากเนื้อหาบทเรียนที่เรียนมาทางอินเทอร์เน็ต

8.1.2 ให้นักศึกษาสังเกตสิ่งรอบตัว ทั้งในวิทยาลัยฯ และภายนอก ว่ามีสิ่งใดบ้างที่สัมพันธ์กับเนื้อหาบทเรียนที่เรียนมา

8.2 งานที่มอบหมาย

ทำในหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ช่วงโยธา บทที่ 7 ฟังก์ชันลอการิธึม

8.2.1 แบบทดสอบก่อนเรียนบทที่ 7 ฟังก์ชันลอการิธึม

8.2.2 แบบประเมินผลการเรียนรู้บทที่ 7 ฟังก์ชันลอการิธึม

8.2.3 แบบทดสอบหลังเรียนบทที่ 7 ฟังก์ชันลอการิธึม

9. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

1. ผลการใช้แผนการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

2. ผลการเรียนรู้ของนักเรียน/ผลการสอนของครู/ปัญหาที่พบ

.....

.....

.....

.....

.....

3. แนวทางการแก้ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ตัวแทนนักเรียน

ลงชื่อ.....

(.....)

ครูผู้สอน

การประเมินผล บทที่ 7 ฟังก์ชันลอการิธึม

คำชี้แจง : คะแนนรวมต่อบท 100 คะแนนเต็ม

1. แบบฝึกหัด จำนวน 10 ข้อ ข้อละ คะแนน รวม คะแนน
2. แบบประเมินผลก่อนและหลังการเรียนรู้ จำนวน 10 ข้อ ข้อละ คะแนน รวม คะแนน
3. ประเมินจิตพิสัยตามสภาพจริง 20 คะแนน

แบบวัดผล						
บทที่ 7 ฟังก์ชันลอการิธึม						
ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา รหัสวิชา 20121-1001					วิทยาลัย	
ชื่อ-สกุล..... ระดับ.....					ครู	
ที่	รายการประเมิน	คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน		คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน		คะแนนแบบฝึกหัด
		คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	
1	ฟังก์ชันลอการิธึม					
2	การดำเนินการของลอการิธึม					
3	กราฟของฟังก์ชันลอการิธึม					
4	ลอการิธึมสามัญ					
5	ค่าลอการิธึมสามัญจากตาราง					
6	ลอการิธึมธรรมชาติ					
7	สมการลอการิธึม					
8						
9						
10						
11						
12						
รวมคะแนนด้านทักษะ		10		10		60
13	ความขยันหมั่นเพียร ความวิริยะอุตสาหะ					10
14	ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์สุจริต					10
รวมคะแนนทั้งหมด				100		รวม

	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8	หน่วยที่ 8
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา	เวลาเรียนรวม 36 ชม.
	ชื่อหน่วย บทที่ 8 กราฟ	สอนครั้งที่ 15-16/18
ชื่อเรื่อง กราฟ		จำนวน 4 คาบ

1. สาระสำคัญ

คู่อันดับ (Ordered Pair) คือ สัญลักษณ์ที่แสดงการจับคู่กันระหว่างสิ่ง 2 สิ่ง ความสัมพันธ์ของจำนวนคู่อันดับสองจำนวน เราสามารถเขียนในรูปของ “กราฟ” (Graph) โดยกราฟที่นำมาใช้เกี่ยวกับงานทางด้านวิศวกรรมมากที่สุดคือกราฟเส้น (Line Graph) เขียนอยู่ในระบบพิกัดฉาก

สมการเส้นตรง (Straight Line Equation) ในระนาบ แกนออร์ดิเนต x , y จะเป็นการแสดงความสัมพันธ์ของคู่อันดับสองจำนวน

เขียนอยู่ในรูปได้ดังนี้ $y = mx + b$

เส้นโค้งพาราโบลาจะแสดงอยู่ในรูปความสัมพันธ์ของฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Function)

เขียนอยู่ในรูปมาตรฐาน

$$y = a(x - h)^2 + k \quad \text{เมื่อ } (h, k) \text{ คือ ค่าพิกัดจุดยอดของพาราโบลา}$$

2. สาระการเรียนรู้

1. คู่อันดับ
2. กราฟในระบบพิกัดฉาก
3. กราฟจากสมการเส้นตรง
4. เส้นโค้งพาราโบลา

3. จุดประสงค์การเรียนรู้

จุดประสงค์ทั่วไป

เพื่อให้มีความเข้าใจเกี่ยวกับคู่อันดับ สัญลักษณ์และความหมาย สามารถแปลผลความสัมพันธ์ต่าง ๆ ให้เป็นข้อมูลคู่อันดับได้ และนำข้อมูลจากคู่อันดับไปเขียนกราฟลงบนพิกัดฉาก แปลความหมายต่าง ๆ ที่ได้จากกราฟ ประยุกต์การทำข้อมูลคู่อันดับมาเขียนกราฟในงานช่างโยธา

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เข้าใจ ความหมาย สัญลักษณ์ ของคู่อันดับ
2. แปลผลจากความสัมพันธ์ต่าง ๆ ให้เป็นข้อมูลคู่อันดับได้อย่างถูกต้องตามหลักวิทยาศาสตร์
3. นำข้อมูลจากคู่อันดับไปเขียนกราฟลงบนพิกัดฉาก และแปลความหมายจากกราฟได้
4. ประยุกต์การแปลผลความสัมพันธ์ให้เป็นคู่อันดับแล้วมาเขียนกราฟลงบนพิกัดฉาก เพื่อใช้ในงานช่างโยธาได้อย่างถูกต้อง

4. สารการเรียนรู้

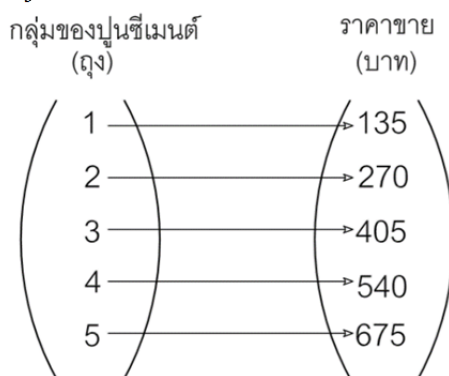
4.1 คู่อันดับ (Ordered Pair)

ถ้าเรามีปริมาณอยู่สองปริมาณที่มีความสัมพันธ์กัน เช่น ปูนซีเมนต์ หน่วยเป็น ถุง และราคาขายถุงละ 135 บาท ปริมาณทั้งสองเราจะพิจารณาความสัมพันธ์กันในการขายต่อจำนวนเงินที่ได้ แสดงดังตาราง

ตารางที่ 8.1

จำนวนปูนซีเมนต์ (ถุง)	ราคาขาย (บาท)
1	135
2	270
3	405
4	540
5	675

จากตารางข้างต้นจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสองปริมาณ คือ 1 คู่กับ 135, 2 คู่กับ 270, 3 คู่กับ 405, 4 คู่กับ 540, และ 5 คู่กับ 675 นำไปเขียนแผนภาพแสดงการจับคู่กันระหว่างปริมาณทั้งสองได้



รูปที่ 8.1

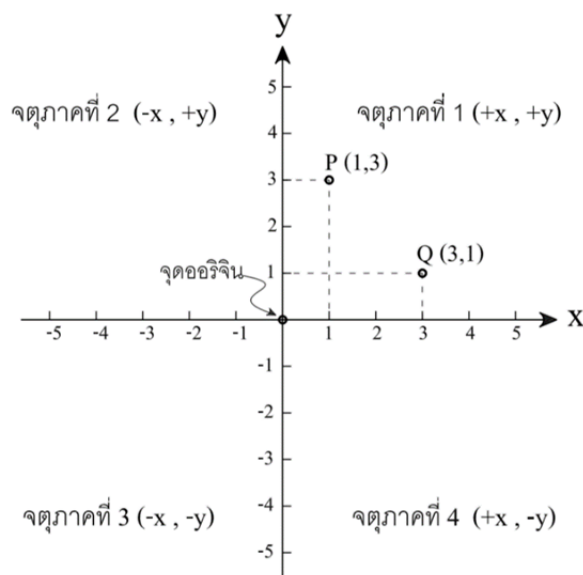
การเขียนแสดงการจับคู่จะใช้สัญลักษณ์ $(1, 135)$ อ่านว่า คู่อันดับ หนึ่ง หนึ่งร้อยสามสิบห้า โดยที่จำนวน 1 เป็นสมาชิกตัวที่หนึ่งอยู่ในกลุ่มของปูนซีเมนต์ และจำนวน 135 เป็นสมาชิกตัวที่สองอยู่ในกลุ่มราคาขาย การใช้คู่อันดับแสดงความสัมพันธ์ของสองปริมาณใด ๆ ก็ตามจะไม่สามารถสลับสมาชิกได้ เพราะจะให้ความหมายของคู่อันดับเปลี่ยนไป เช่น $(1, 135)$ มีความหมายว่า ปูนซีเมนต์ 1 ถุง ขายในราคา 135 บาท ถ้าเราทดลองสลับสมาชิกเป็น $(135, 1)$ ความหมายจะเปลี่ยนไปเป็นปูนซีเมนต์ 135 ถุง ขายในราคา 1 บาท สำหรับการเขียนคู่อันดับอื่นได้ว่า $(2, 270)$, $(3, 405)$, $(4, 540)$ และ $(5, 675)$

4.2 กราฟในระบบพิกัดฉาก (Graph in Rectangular Coordinate System)

ในการกล่าวถึงความสัมพันธ์ของจำนวนคู่อันดับสองจำนวน เราสามารถเขียนแสดงความสัมพันธ์ได้ในรูปของตาราง แผนภาพ รวมทั้งการแสดงในรูปของ “กราฟ” (Graph) โดยกราฟที่นำมาใช้เกี่ยวกับงานทางด้านวิศวกรรมมากที่สุดคือกราฟเส้น (Line Graph) เขียนอยู่ในระบบพิกัดฉาก

ระบบพิกัดฉาก (Rectangular Coordinates) หรือเรียกว่า พิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian Coordinate) ในแผ่นระนาบ 2 มิติ จะประกอบด้วยเส้นจำนวนจริง 2 เส้นที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน เรียกว่า แกนโคออร์ดิเนต (Coordinate Axes) จุดตัดระหว่างแกนทั้งสองเรียกว่า จุดออริจิน (Origin)

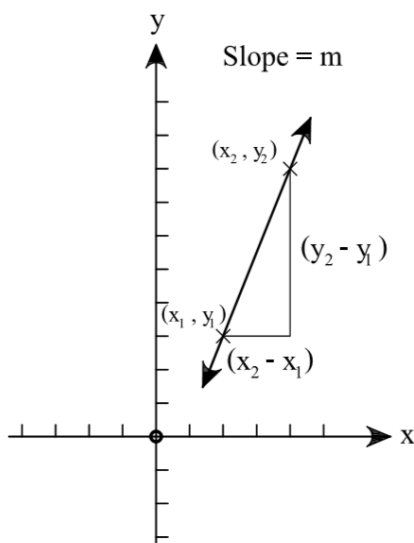
แกนโคออร์ดิเนตในแนวนอนเรียกว่า แกน x และ แกนโคออร์ดิเนตในแนวตั้งเรียกว่า แกน y ที่วางระหว่างแกนทั้งสองจะเรียกว่า ระนาบพิกัดฉาก หรือ ระนาบ $x - y$ ซึ่งเราสามารถกำหนดพิกัดตำแหน่งใด ๆ ลงไปในระนาบนั้นได้โดยที่พิกัดตำแหน่งนั้นจะประกอบขึ้นด้วยจำนวนสองจำนวนที่เป็นคู่อันดับกัน พิจารณารูปที่ 8.2 ประกอบ



รูปที่ 8.2

4.3 กราฟจากสมการเส้นตรง (Graph from Straight Line Equation)

สมการเส้นตรง (Straight Line Equation) ในระนาบ แกนออร์ดิเนต x, y จะเป็นการแสดงความสัมพันธ์ของคู่อันดับสองจำนวน



รูปที่ 8.3

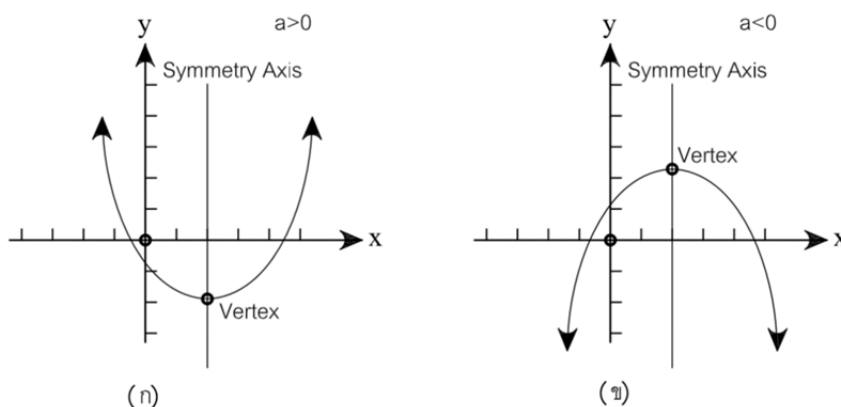
พิจารณารูปที่ 8.3 ประกอบ กราฟเส้นตรงมีพิกัดที่จุดแรก (x_1, y_1) และพิกัดสุดท้ายที่ (x_2, y_2) ซึ่งถือเป็นจุดแตกต่างกันสองจุดบนเส้นตรง ซึ่งถ้าใช้ความสัมพันธ์ของตรีโกณมิติ จะได้ค่าความชันของเส้นตรงดังกล่าว เขียนอยู่ในรูปได้ว่า

$$\text{ค่าความชันของเส้นตรง} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{หรือสมการเส้นตรง} \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

4.4 เส้นโค้งพาราโบลา (Parabolic Curve)

พาราโบลา (Parabola) คือเซตของจุดใด ๆ บนระนาบที่มีลักษณะเป็นแนวเส้นโค้ง ตัวอย่างของพาราโบลา และส่วนประกอบต่าง ๆ ของพาราโบลาแสดงดังนี้



รูปที่ 8.5

พิจารณารูปที่ 8.5 ประกอบ กรณีถ้า $a > 0$ แล้ว จะเป็นกราฟพาราโบลาหงาย (Parabola Open Upward) ส่วนกรณีถ้า $a < 0$ แล้ว จะเป็นกราฟพาราโบลาคว่ำ (Parabola Open Downward) แกนสมมาตรหรือเรียกว่าแกนพาราโบลาที่สร้างขึ้นสำหรับการเขียนรูปกราฟ จุดยอด (Vertex) จะเป็นตำแหน่งที่เส้นกราฟตัดกับแกนพาราโบลา

ตัวอย่างที่ 8.1 จงหาค่าความชันระหว่างพิกัด P (1, -1) และ Q (3, 5)

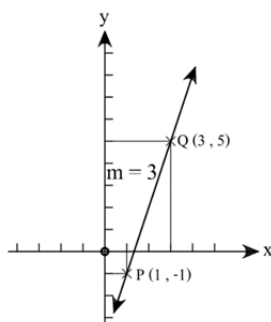
วิธีทำ

กำหนดให้ $(x_1, y_1) = (1, -1)$

$(x_2, y_2) = (3, 5)$

$$\begin{aligned} \text{ความชันของเส้นตรง} \quad m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m &= \frac{5 - (-1)}{3 - 1} = 3 \end{aligned}$$

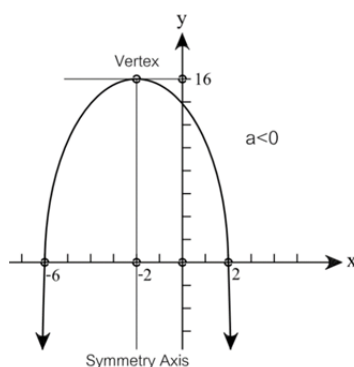
ตอบ



รูปที่ 8.7

ตัวอย่างที่ 8.2 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = -x^2 - 4x + 12$

วิธีทำ



รูปที่ 8.8

ฟังก์ชัน

$$y = -x^2 - 4x + 12$$

เมื่อ $a < 0$ เป็นกราฟพาราโบลาคว่ำ และ $a = -1$, $b = -4$ และ $c = 12$

พิกัด x ของจุดยอด

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(-1)} = -2$$

พิกัด y ของจุดยอด

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(12) - (-4)^2}{4(-1)} = 16$$

หาจุดตัด x โดยกำหนดให้ $y = 0$; $0 = -x^2 - 4x + 12$

นำสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรแทนในสูตร
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

แทนค่า a, b และ c ลงในสูตร จะได้จุดตัด x มาสองค่า

จุดตัดแกน $x = 2$ และ $x = -6$ เขียนกราฟพาราโบลาแสดงดังรูปที่ 8.8

ตอบ

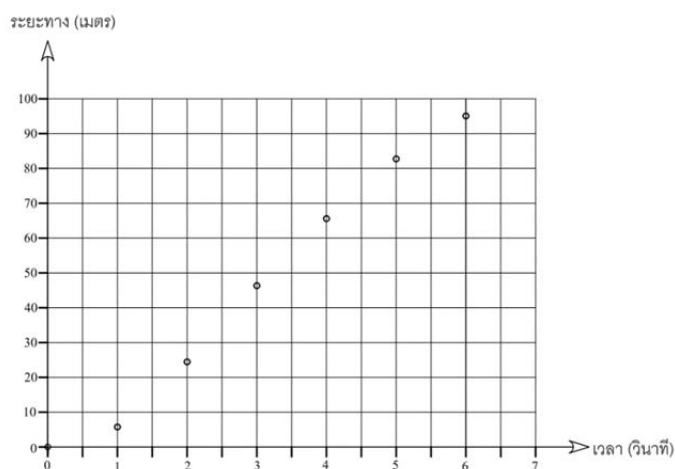
ตัวอย่างที่ 8.3 จากข้อมูลคู่อันดับซึ่งสมาชิกตัวที่หนึ่งแสดงเวลาเป็นวินาทีและสมาชิกตัวที่สองแสดงเป็นระยะทางเป็นเมตร โดยแสดงความสัมพันธ์ของการปล่อยวัตถุหนึ่งลงมาจากตึกสูง 95 m แสดงดังตาราง

เวลา (วินาที)	0	1	2	3	4	5	6
ระยะทาง (เมตร)	0	6	24	47	66	83	95

จงเขียนกราฟของคู่อันดับและตอบคำถามต่อไปนี้

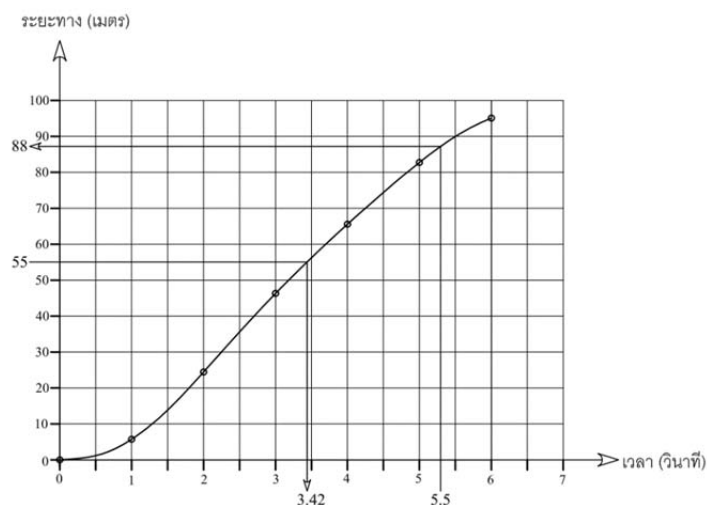
1. เมื่อเวลาผ่านไป 5.5 วินาที วัตถุตกลงมาได้กี่เมตร
2. ถ้าวัตถุตกลงมาได้ 55 เมตร ใช้เวลากี่นาที

วิธีทำ สร้างตารางเขียนแกน x และ y ลงจุดพิกัดจากคู่อันดับ แสดงดังรูปที่ 8.9



รูปที่ 8.9

ลากเส้นเชื่อมต่อระหว่างจุดจะได้เส้นกราฟแสดงดังรูปที่ 8.10 จากนั้นที่แกน x เวลา 5.5 วินาทีลากเส้นแนวตั้งขึ้นไปตัดกับเส้นกราฟ จากนั้นลากเส้นแนวนอนที่จุดตัดไปตัดกับแกน y อ่านค่าจะได้ระยะทาง 88 เมตร จากแกน y ที่ระยะทาง 55 เมตร ลากเส้นแนวนอนไปตัดกับกราฟ จากนั้นลากเส้นแนวตั้งที่จุดตัดลงมาตัดกับแกน x อ่านค่าจากจะได้เวลา 3.42 วินาที **ตอบ**



รูปที่ 8.10

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูอธิบายเกี่ยวกับสาระสำคัญและจุดประสงค์การเรียนรู้
2. นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนหน่วยการเรียนรู้ที่ 8

ขั้นสอน

3. ครูอธิบายเนื้อหาและให้ความรู้ ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 8 กราฟ
4. นักเรียนทำแบบทดสอบหน่วยที่ 8 ในหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ช่างโยธา

ขั้นสรุปและการประยุกต์

5. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบประเมินผลการเรียนรู้บทที่ 8 พร้อมกับสรุปบทเรียนร่วมกัน

6. สื่อการเรียนรู้

เอกชัย รัตนโน. คณิตศาสตร์ช่างโยธา (Mathematics for Civil Work) รหัสวิชา 20121-1001, พิมพ์และจัดจำหน่ายโดย บริษัท ซีเอ็ดดูเคชั่น จำกัด (มหาชน), พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2565

7. การวัดผลประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 8
3. สังเกตและประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 8
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยอาจารย์และนักศึกษา ร่วมกันประเมิน

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล เกณฑ์ผ่าน ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 8 เกณฑ์ผ่าน ทำถูกต้อง 60% ขึ้นไป
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับ การประเมินตามสภาพจริง

8. กิจกรรมเสนอแนะ/งานที่มอบหมาย

8.1 กิจกรรมเสนอแนะ

8.1.1 ให้นักศึกษาค้นคว้าหาข้อมูลเพิ่มเติม นอกเหนือจากเนื้อหาบทเรียนที่เรียนมาทางอินเทอร์เน็ต

8.1.2 ให้นักศึกษาสังเกตสิ่งรอบตัว ทั้งในวิทยาลัยฯ และภายนอก ว่ามีสิ่งใดบ้างที่สัมพันธ์กับเนื้อหาบทเรียนที่เรียนมา

8.2 งานที่มอบหมาย

ทำในหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ช่วงโยธา บทที่ 8 กราฟ

8.2.1 แบบทดสอบก่อนเรียนบทที่ 8 กราฟ

8.2.2 แบบประเมินผลการเรียนรู้บทที่ 8 กราฟ

8.2.3 แบบทดสอบหลังเรียนบทที่ 8 กราฟ

9. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

1. ผลการใช้แผนการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

2. ผลการเรียนรู้ของนักเรียน/ผลการสอนของครู/ปัญหาที่พบ

.....

.....

.....

.....

.....

3. แนวทางการแก้ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ตัวแทนนักเรียน

ลงชื่อ.....

(.....)

ครูผู้สอน

การประเมินผล บทที่ 8 กราฟ

คำชี้แจง : คะแนนรวมต่อบท 100 คะแนนเต็ม

1. แบบฝึกหัด จำนวน 10 ข้อ ข้อละ คะแนน รวม คะแนน
2. แบบประเมินผลก่อนและหลังการเรียนรู้ จำนวน 10 ข้อ ข้อละ คะแนน รวม คะแนน
3. ประเมินจิตพิสัยตามสภาพจริง 20 คะแนน

แบบวัดผล							
บทที่ 8 กราฟ							
ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา รหัสวิชา 20121-1001					วิทยาลัย		
ชื่อ-สกุล..... ระดับ.....					ครู		
ที่	รายการประเมิน	คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน		คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน		คะแนนแบบฝึกหัด	
		คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้		
1	คู่อันดับ						
2	กราฟในระบบพิกัดฉาก						
3	กราฟจากสมการเส้นตรง						
4	เส้นโค้งพาราโบลา						
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
รวมคะแนนด้านทักษะ		10		10		60	
13	ความขยันหมั่นเพียร ความวิริยะอุตสาหะ					10	
14	ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์สุจริต					10	
รวมคะแนนทั้งหมด				100		รวม	

	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9	หน่วยที่ 9
	ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา	เวลาเรียนรวม 36 ชม.
	ชื่อหน่วย บทที่ 9 เรขาคณิต พื้นที่และปริมาตร	สอนครั้งที่ 17-18/18
ชื่อเรื่อง เรขาคณิต พื้นที่และปริมาตร		จำนวน 4 คาบ

1. สาระสำคัญ

รูปเรขาคณิต (Geometry) คือรูปทรงที่มีกฎเกณฑ์ ขนาดความกว้าง ยาว และมีมุมที่สามารถพิสูจน์ทราบได้และสามารถคำนวณหาพื้นที่ (Area) โดยใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ในรูปของสูตร รูปเรขาคณิตจะสามารถนำไปสร้างให้เป็นรูปทรงสามมิติได้ เช่น ทรงกระบอก ทรงกลม ปริซึม พีระมิดและกรวย โดยรูปทรงเหล่านี้จะมีสูตรในการคำนวณหาพื้นที่ผิวหรือปริมาตรได้เช่นกัน

2. สาระการเรียนรู้

1. เรขาคณิต
2. เครื่องมือที่ใช้ในการเขียนรูปเรขาคณิต
3. เส้นตรง
4. รูปสามเหลี่ยม
5. รูปหลายเหลี่ยม
6. รูปวงรี
7. พื้นที่รูปเรขาคณิต
8. ปริมาตรรูปเรขาคณิต

3. จุดประสงค์การเรียนรู้

จุดประสงค์ทั่วไป

เพื่อให้มีความเข้าใจเกี่ยวกับการสร้างรูปเรขาคณิต เส้นตรง รูปสามเหลี่ยม รูปหลายเหลี่ยม และรูปวงรี ตลอดจนคำนวณหาค่าพื้นที่และปริมาตรของรูปเรขาคณิต 2 มิติและ 3 มิติ ประยุกต์ความรู้ที่ได้นำมาใช้ในการช่างโยธา

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. ใช้เครื่องมือเขียนแบบพื้นฐานเพื่อสร้างรูปเรขาคณิต 2 มิติ แบบต่าง ๆ ได้
2. คำนวณหาพื้นที่ของรูปเรขาคณิต 2 มิติได้
3. คำนวณหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของรูปเรขาคณิต 3 มิติได้
4. นำความรู้ เกี่ยวกับการสร้างรูปเรขาคณิตและหาพื้นที่ พื้นผิว ปริมาตรรูปเรขาคณิต 2 มิติ และ 3 มิติ มาประยุกต์ใช้ในการช่างโยธาได้

4. สารการเรียนรู้

4.1 เรขาคณิต (Geometry)

การเขียนรูปเรขาคณิตเป็นการสร้างรูปร่างอย่างมีกฎเกณฑ์มีขนาดความกว้าง ยาว และมีมุมที่สามารถพิสูจน์ได้ด้วยเหตุผล และต้องสามารถคำนวณหาพื้นที่หรือความยาวด้านได้เนื้อหาในบทเรียนนี้เป็นการเขียนรูปทรงเรขาคณิตโดยพื้นฐานที่จะใช้เครื่องมือประกอบหลักคือบรรทัดสามเหลี่ยม วงเวียน ดินสอ และยางลบ

4.2 เครื่องมือที่ใช้ในการเขียนรูปเรขาคณิต

4.2.1 ดินสอเขียนแบบเปลือกไม้ (Drawing Pencil)

ดินสอเขียนแบบเปลือกไม้ (Drawing Pencil) เป็นดินสอที่ใช้กันมานานมากปัจจุบันก็ยังคงได้รับความนิยมเนื่องจากราคาไม่แพงมาก ให้ความเป็นสุนทรีย์เวลาใช้งาน ดินสอประเภทนี้มีไส้ทำจากแกรไฟต์ (graphite) อยู่แกนกลางห่อหุ้มด้วยไม้เนื้ออ่อน ที่ด้านหัวจะมีสัญลักษณ์บอกความแข็งของไส้ดินสอเรียกว่า เกรด ซึ่งจะเป็นตัวเลขและตัวอักษรภาษาอังกฤษแบ่งออกได้เป็น 3 กลุ่ม ตามความแข็งของไส้ ดังนี้

1. กลุ่มไส้เกรดแข็ง (HARD) ไส้ดินสอจะมีขนาดเล็ก เกรดระบุ 9H, 8H, 7H, 6H, 5H, 4H เรียงลำดับจากความแข็งมากมาหาน้อย ดินสอเกรดนี้จะให้เส้นที่ออกมาบาง น้ำหนักเส้นเบา
2. กลุ่มไส้เกรดแข็งปานกลาง (MEDIUM) เกรดระบุ 3H, 2H, H, F, HB, B ใช้กับงานเขียนแบบทั่วไป โดยเส้นร่างนิยมใช้เกรด 2H และลงเส้นหนักใช้เกรด B หรือ HB
3. กลุ่มไส้เกรดอ่อน (SOFT) ไส้ดินสอจะมีขนาดเล็ก เกรดระบุ 2B, 3B, 4B, 5B, 6B, 7B เรียงลำดับจากความอ่อนน้อยมาหาอ่อนมาก ดินสอเกรดนี้จะให้ที่ออกมาคมชัด นิยมใช้กับงานทางด้านศิลปะ

4.2.2 บรรทัดสามเหลี่ยม

บรรทัดสามเหลี่ยมที่ใช้จะเป็นแบบมาตราส่วนย่อ (Brief Scale) เป็นการเขียนแบบโดยนำขนาดของรูปงานจริงนำมาย่อลงแล้วเขียนลงในกระดาษเขียนแบบ มาตราส่วนที่ใช้เช่น 1:2, 1:50, 1:100 ซึ่งมาตราส่วน 1:100 จะใช้เขียนแบบรูปงานทั่วไป เช่น แปลนพื้น แบบรูปด้าน แบบรูปตัด และเป็นมาตราส่วนที่ใช้เขียนแบบในโปรแกรมคอมพิวเตอร์อีกด้วย

4.2.3 ฉากสามเหลี่ยม (Set-Square)

ฉากสามเหลี่ยมหรือบรรทัดสามเหลี่ยม ทำด้วยพลาสติกแข็งประเภทพอลิสไตรีน มีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่ขอบด้านประกอบมุมฉากจะมีระยะกำกับ ฉากประเภทนี้จะมี 2 ชนิด คือ ชนิดที่มีมุม 45 องศา กับชนิดที่มีมุม 30 และ 60 องศา วิธีการใช้จะใช้ร่วมกับไม้ที่ในการลากเส้นในแนวเอียงหรือแนวตั้ง

4.2.4 วงเวียน (Compasses)

วงเวียน (Compasses) เป็นเครื่องมือที่ใช้เขียนวงกลมหรือส่วนโค้ง โดยมีลักษณะเป็นแขนงอกสองข้าง ที่ปลายแขนข้างหนึ่งจะเป็นเหล็กแหลมไว้สำหรับวางจุดตรงศูนย์กลางของวงกลมหรือศูนย์กลางของส่วนโค้ง ส่วนปลายอีกข้างจะเป็นงาแหวนไว้สำหรับสวมไส้ดินสอหรือปากกาเขียนแบบโดยมีสกรูอยู่ด้านข้างไว้สำหรับยึดแน่นดินสอหรือปากกาไว้

การใช้วงเวียน จะกางแขนสองข้างออกมีระยะความยาวเท่ากับรัศมีวงกลมหรือรัศมีส่วนโค้งที่เราต้องการ จากนั้นก็วาดวงกลมโดยหมุนตามทิศทางของเข็มนาฬิกา

4.3 เส้นตรง

4.3.1 การแบ่งเส้นตรงออกเป็นสองส่วนเท่ากัน

ขั้นตอนที่ 1 ลากเส้นตรงแนวนอน AB

ขั้นตอนที่ 2 นำวงเวียนมาใช้โดยให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง กางวงเวียนให้มีรัศมีเท่ากับระยะ AB เขียนส่วนโค้งทั้งบนและล่างของเส้นตรง เปลี่ยนให้จุด B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่าเดิมเขียนส่วนโค้งทั้งบนและล่างเส้นตรงจะได้จุดตัด a และ b

ขั้นตอนที่ 3 ลากเส้นตรงจากจุด b ไป a จะได้จุดตัด F ที่จะแบ่งเส้นตรงออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

4.3.2 การแบ่งเส้นตรงออกเป็นหลายส่วนเท่า ๆ กัน

ขั้นตอนที่ 1 โจทย์กำหนดเส้นตรงแนวนอน AB ให้ทำการแบ่งเส้นตรงออกเป็น 5 ส่วนเท่า ๆ กัน ทำการลากเส้นตรง AC โดยเอียงทำมุมประมาณ 30 องศา

ขั้นตอนที่ 2 นำวงเวียนมาใช้โดยให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง กางวงเวียนให้มีรัศมีประมาณหนึ่ง เขียนส่วนโค้งบนเส้นตรง AC เกิดจุด a เปลี่ยนให้จุด a เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่าเดิมเขียนส่วนโค้งบนเส้นตรง AC เกิดจุด b ทำต่อไปจนเกิดจุด e ครบ 5 จุด

ขั้นตอนที่ 3 นำบรรทัดสามเหลี่ยมมาทาบตามแนว B-e ลากเส้นตรงจากจุด B ไป e จากนั้นลากเส้นตรงจากจุด d, c, b และ a มาตัดกับเส้นตรง AB โดยแต่ละเส้นต้องให้ขนานกับเส้น Be (ใช้บรรทัดสามเหลี่ยมเข้าช่วย) จะได้จุดตัดของเส้นตรง AB ที่แบ่งเส้นตรงออกเป็น 5 ส่วนเท่า ๆ กัน

4.3.3 การเขียนเส้นตั้งฉากกับเส้นตรง

ขั้นตอนที่ 1 โจทย์กำหนดเส้นตรงแนวนอน AB ให้ทำการเขียนเส้นตั้งฉากโดยมีจุดเริ่มที่จุด C

ขั้นตอนที่ 2 นำวงเวียนมาใช้โดยให้จุด C เป็นจุดศูนย์กลาง กางวงเวียนให้มีรัศมีประมาณหนึ่ง เขียนส่วนโค้งบนเส้นตรง AB เกิดจุด a และ b

ขั้นตอนที่ 3 ให้จุด a เป็นจุดศูนย์กลาง กางวงเวียนให้มีรัศมีเท่ากับระยะ ab เขียนส่วนโค้งเหนือเส้น AB จากนั้นให้จุด b เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมีเท่าเดิม เขียนส่วนโค้งเหนือเส้น AB จะได้จุดตัด F

ขั้นตอนที่ 4 ลากเส้นตรงจากจุด C ไป F จะได้แนวเส้นตรงจากจุด C ที่ตั้งฉากกับเส้นตรง AB

4.4. รูปสามเหลี่ยม

4.4.1 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ขั้นตอนที่ 1 โจทย์กำหนดเส้นตรง AB

ขั้นตอนที่ 2 นำวงเวียนมากางทาบไปกับเส้นตรง AB โดยให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง ให้มีรัศมีเท่ากับความยาว AB เขียนส่วนโค้ง จากนั้นให้จุด B เป็นจุดศูนย์กลาง เขียนส่วนโค้งตัดกันกับส่วนโค้งแรก ได้จุด C

ขั้นตอนที่ 3 ลากเส้นตรงจาก A ไป C และลากเส้นตรงจาก B ไป C จะได้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

4.4.2 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ขั้นตอนที่ 1 โจทย์กำหนดเส้นตรง AB

ขั้นตอนที่ 2 นำวงเวียนมากางทาบไปกับเส้นตรง AB โดยให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง ให้มีรัศมีเท่ากับความยาว AB เขียนส่วนโค้ง จากนั้นให้จุด B เป็นจุดศูนย์กลาง เขียนส่วนโค้งตัดกันกับส่วนโค้งแรก ได้จุด C ลากเส้นตรงจาก A ไป C และลากต่อไปอีกเป็นระยะยาวพอควร นำวงเวียนที่มีรัศมีเท่าเดิมมาเขียนส่วนโค้งโดยใช้จุด C เป็นจุดศูนย์กลาง ตัดกับเส้นตรงแนว AC จะได้จุด D

ขั้นตอนที่ 3 ลากเส้นตรงจาก B ถึง D จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABD

4.5. รูปหลายเหลี่ยม

4.5.1 การสร้างรูปสี่เหลี่ยมในวงกลม

ขั้นตอนที่ 1 โจทย์กำหนดวงกลม มีเส้นศูนย์กลาง

ขั้นตอนที่ 2 ใช้บรรทัดสามเหลี่ยมทาบเข้าหาจุดตัดระหว่างเส้นศูนย์กลางและเส้นรอบวงเริ่มจากจุด A และ B จากนั้นลากเส้นตรงจาก A ถึง B ทำต่อไปลักษณะเช่นนี้ จาก B ไป C จาก C ไป D และจาก D ไป A

4.5.2 การสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า

ขั้นตอนที่ 1 โจทย์กำหนดวงกลม มีเส้นศูนย์กลาง ทำการแบ่งครึ่งเส้นรัศมีในแนว $a - b$ ได้จุด A

ขั้นตอนที่ 2 ให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง กางวงเวียนมีรัศมีเท่ากับระยะ AB เขียนส่วนโค้งได้จุดตัด C

ขั้นตอนที่ 3 ให้จุด B เป็นจุดศูนย์กลาง กางวงเวียนมีรัศมีเท่ากับระยะ BC เขียนส่วนโค้งได้จุดตัด D

ขั้นตอนที่ 4 ให้จุด B เป็นจุดศูนย์กลาง กางวงเวียนมีรัศมีเท่ากับระยะ BC เขียนส่วนโค้งได้จุดตัด E จากนั้นให้จุด D เป็นจุดศูนย์กลางโดยใช้รัศมีเท่าเดิมเขียนส่วนโค้งได้จุดตัด D1 และให้จุด E เป็นจุดศูนย์กลางได้จุดตัด E1

ขั้นตอนที่ 5 ลากเส้นตรงจากจุด B ไป E จุด E ไป E1 จุด E1 ไป D1 จุด D1 ไป D และจุด D ไป B จะได้รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า

4.5.3 การสร้างรูปหกเหลี่ยมด้านเท่า

ขั้นตอนที่ 1 โจทย์กำหนดวงกลม มีเส้นศูนย์กลาง

ขั้นตอนที่ 2 ให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง กางวงเวียนมีรัศมีเท่ากับระยะ OA เขียนส่วนโค้งได้จุดตัด A1 และ A2 ต่อไปให้จุด B เป็นจุดศูนย์กลาง กางวงเวียนมีรัศมีเท่าเดิม เขียนส่วนโค้งได้จุดตัด B1 และ B2

ขั้นตอนที่ 3 ลากเส้นตรงจากจุด B ไป B2 จุด B2 ไป A2 จุด A2 ไป A จุด A ไป A1 จุด A1 ไป B1 และจุด B1 ไป B จะได้รูปหกเหลี่ยมด้านเท่า

4.5.4 การสร้างรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่า

ขั้นตอนที่ 1 โจทย์กำหนดวงกลม มีเส้นศูนย์กลาง ใช้ไม้ที่เขียนเส้นสัมผัสในแนวนอนกับเส้นรอบวงที่จุด A และ B

ขั้นตอนที่ 2 ใช้บรรทัดสามเหลี่ยม 45 องศาเขียนเส้นสัมผัสในแนวตั้งฉากกับเส้นรอบวงที่จุด C และ D จากนั้นใช้บรรทัดสามเหลี่ยมทาบกับเส้นสัมผัสกับเส้นรอบวงในช่วงที่เหลือ

ขั้นตอนที่ 3 จากการใช้บรรทัดสามเหลี่ยม 45 องศา ทาบเข้ากับเส้นรอบวงที่เหลือแล้วลากเส้นตรงไว้จะได้จุดตัดต่าง ๆ

ขั้นตอนที่ 4 ลากเส้นจากจุดตัดจะได้รูปแปดเหลี่ยมด้านเท่า

4.6 วงรี

การสร้างวงรีโดยการสร้างจุดศูนย์กลางของส่วนโค้งมีลำดับขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 โจทย์กำหนดให้สร้างวงรีมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของด้านยาว 120 มิลลิเมตร และด้านสั้น 60 มิลลิเมตร ลากเส้นตรงในแนวนอน BC ยาว 120 มิลลิเมตร และเส้นตรงแนวตั้งยาว 60 มิลลิเมตร ตัดกันที่กึ่งกลางที่จุด A

ขั้นตอนที่ 2 ลากเส้นตรงจากจุด B ถึง D นำวงเวียนมาเขียนส่วนโค้งรัศมียาว AD ให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลางเขียนส่วนโค้งตัดเส้นตรง AB ได้จุดตัด a

ให้จุด D เป็นจุดศูนย์กลาง เขียนส่วนโค้งรัศมี Ba ตัดกับเส้นตรง BD ได้จุดตัด b

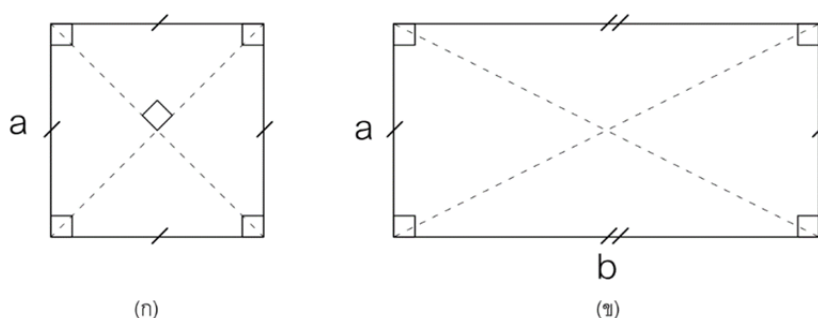
ขั้นตอนที่ 3 ใช้วงเวียนแบ่งครึ่งแนวเส้น Bb ลากเป็นแนวเส้นตรง โดยจุดแบ่งครึ่งจุดบนให้เป็นจุด 3 ส่วนจุดแบ่งครึ่งจุดล่างให้เป็นจุดที่ 1 ซึ่งเป็นจุดตัดกับเส้นตรง AB ทำการต่อแนวเส้นตรง AE ออกไป จะได้จุดตัด e อีกหนึ่งจุด

4.7. พื้นที่รูปเรขาคณิต

พื้นที่ (Area) เป็นอาณานิคมหนึ่งมีรูปทรงเป็นเรขาคณิต วิธีการหาพื้นที่ที่จะเป็นการคูณกันของด้านกว้างและด้านยาว หรือจากกฎของเรขาคณิตแสดงดังต่อไปนี้

4.7.1 กลุ่มรูปสี่เหลี่ยม

รูปสี่เหลี่ยมคือรูปเรขาคณิตที่มีจำนวนด้านทั้งหมดเท่ากับสี่ด้านและจำนวนมุมภายในเท่ากับสี่มุม รูปสี่เหลี่ยมที่จะอธิบายนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมอย่างง่ายไม่มีด้านตัดกัน ดังนั้นผลรวมของมุมภายในทั้งหมดจะต้องเท่ากับ 360 องศา รูปสี่เหลี่ยมแบ่งออกได้หลายชนิด อธิบายได้ดังนี้



รูปที่ 9.23 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

1. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่า (Square) แสดงดังรูปที่ 9.23(ก)

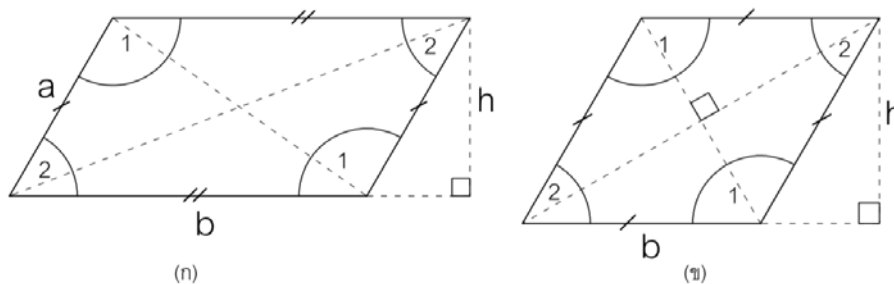
- สมบัติของรูป
- ความยาวด้าน (a) เท่ากันทั้งสี่ด้าน
 - มุมภายในทุกมุมเป็นมุมฉาก
 - เส้นทแยงมุมจะตัดกันเป็นมุมฉาก

สูตรหาพื้นที่ $A = a \times b$

2. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangle) แสดงดังรูปที่ 9.23(ข)

- สมบัติของรูป
- ความยาวด้านที่ขนานกันจะเท่ากันหรือ $a = a$ และ $b = b$
 - มุมภายในทุกมุมเป็นมุมฉาก
 - เส้นทแยงมุมจะเท่ากันและจะแบ่งครึ่งซึ่งกัน

สูตรหาพื้นที่ $A = a \times b$



รูปที่ 9.24 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

3. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (Parallelogram) แสดงดังรูปที่ 9.24(ก)

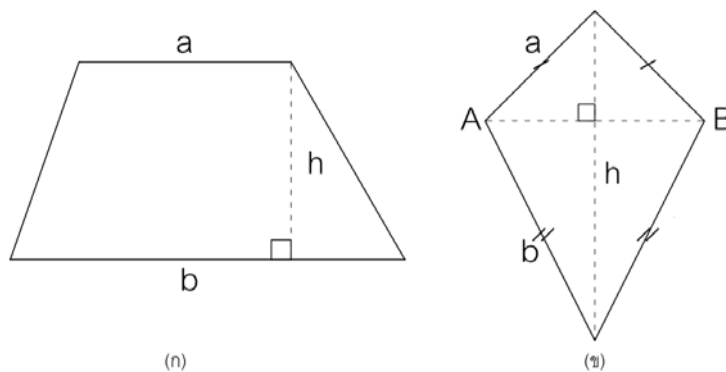
- สมบัติของรูป - ความยาวด้านที่ขนานกันจะเท่ากันหรือ $a = a$ และ $b = b$
 - มุมภายในที่ตรงข้ามกันจะเท่ากันหรือ มุม 1 = มุม 1 และ มุม 2 = มุม 2
 - เส้นทแยงมุมจะเท่ากันและจะแบ่งครึ่งซึ่งกัน

สูตรหาพื้นที่ $A = b \times h$

4. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน (Rhombus) แสดงดังรูปที่ 9.24(ข)

- สมบัติของรูป - ความยาวด้าน (b) จะเท่ากันทุกด้าน
 - มุมภายในที่ตรงข้ามกันจะเท่ากันหรือ มุม 1 = มุม 1 และ มุม 2 = มุม 2
 - เส้นทแยงมุมจะตัดกันเป็นมุมฉากและจะแบ่งครึ่งซึ่งกัน

สูตรหาพื้นที่ $A = b \times h$



รูปที่ 9.25 รูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมรูปลาว

5. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoid) แสดงดังรูปที่ 9.25(ก)

- สมบัติของรูป - ความยาวด้านแต่ละด้านไม่เท่ากัน
 - ด้านจะขนานกันหนึ่งคู่ หรือ a ขนานกับ b

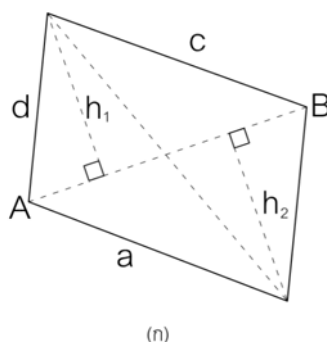
สูตรหาพื้นที่ $A = \frac{1}{2}(a + b)h$

6. รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว (Kite) แสดงดังรูปที่ 9.25(ข)

- สมบัติของรูป - ความยาวด้านที่ประชิดมุมกันจะยาวเท่ากันหรือ $a = a$ และ $b = b$
 - เส้นทแยงมุมตัดกันและจะตั้งฉากกันซึ่งกัน

สูตรหาพื้นที่ $A = \frac{1}{2}(AB)h$

โดยที่ AB = ความยาวเส้นทแยงมุมจาก A ไป B



รูปที่ 9.26 รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า

7. รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า (Quadrilateral) แสดงดังรูปที่ 9.26

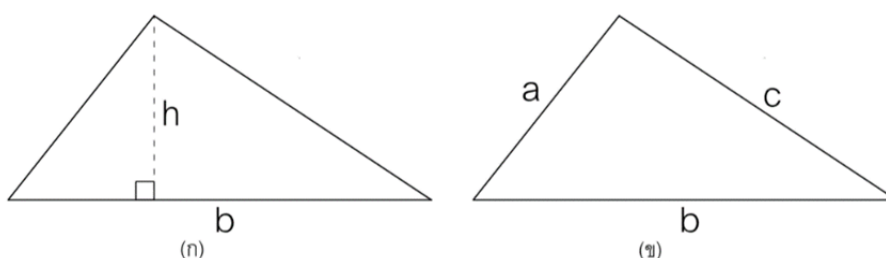
- สมบัติของรูป - ความยาวด้านแต่ละด้านไม่เท่ากัน
 - เส้นทแยงมุมจะเท่ากัน
 - เส้นทแยงมุมที่ลากมาจากมุมยอดมายังเส้นทแยง AB ทำมุมตั้งฉากเรียกว่า เส้นกึ่ง ซึ่งจะมีสองเส้นใช้หาพื้นที่

สูตรหาพื้นที่ $A = \frac{(h_1 + h_2)}{2} AB$

โดยที่ AB = ความยาวเส้นทแยงมุมจาก A ไป B

4.7.2 กลุ่มรูปสามเหลี่ยม

รูปสามเหลี่ยมคือรูปเรขาคณิตที่มีจำนวนด้านทั้งหมดเท่ากับสามด้านและจำนวนมุมภายในเท่ากับสามมุม ของมุมภายในทั้งหมดจะต้องเท่ากับ 180 องศา รูปสามเหลี่ยมแบ่งออกได้หลายชนิดอธิบายได้ดังนี้



รูปที่ 9.27 รูปสามเหลี่ยม

1. รูปสามเหลี่ยม (Triangle) กรณีทราบความสูงตั้งฉาก (h) และความยาวฐาน

(b) แสดงดังรูปที่ 9.27(ก)

สมบัติของรูป - ความยาวด้านตรงข้ามมุมใหญ่หรือ (b) จะมีความยาวมากกว่าด้านที่ตรงข้ามกับมุมเล็กทั้งสองด้าน

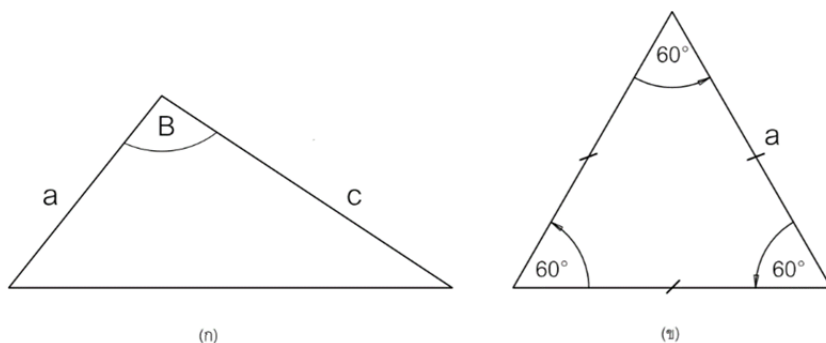
$$\text{สูตรหาพื้นที่} \quad A = \frac{1}{2}(b \times h)$$

2. รูปสามเหลี่ยม (Triangle) กรณีทราบความยาวด้านทั้งสามด้าน (a, b, c)

แสดงรูปที่ 9.27(ข)

สมบัติของรูป - ความยาวด้านตรงข้ามมุมใหญ่หรือ (b) จะมีความยาวมากกว่าด้านที่ตรงข้ามกับมุมเล็กทั้งสองด้าน

$$\text{สูตรหาพื้นที่} \quad A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{โดยที่} \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$



รูปที่ 9.28 รูปสามเหลี่ยมและรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

3. รูปสามเหลี่ยม (Triangle) กรณีทราบความยาวด้านสองด้านและค่ามุม แสดง

ดังรูปที่ 9.28(ก)

สมบัติของรูป - ความยาวด้านตรงข้ามมุมใหญ่หรือ (b) จะมีความยาวมากกว่าด้านที่ตรงข้ามกับมุมเล็กทั้งสองด้าน

$$\text{สูตรหาพื้นที่} \quad A = \frac{1}{2}(a \times c) \sin B$$

4. รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าหรือสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (Equilateral Triangle) แสดง

ดังรูปที่ 9.28(ข)

สมบัติของรูป - ความยาวด้านเท่ากันทุกด้าน
- มุมภายในเท่ากันทุกมุมที่ 60 องศา

$$\text{สูตรหาพื้นที่} \quad A = \frac{\sqrt{3}}{4}(a \times a)$$

4.7.3 รูปวงกลมและรูปวงรี

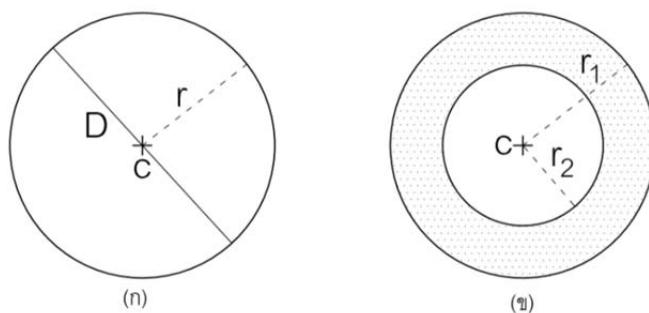
1. **รูปวงกลม (Circle)** เป็นรูปร่างพื้นฐานอันหนึ่งในเรขาคณิต แสดงในรูปที่ 9.29 (ก) วงกลมเป็นโลกัส (Locus) ของจุดทุกจุดบนระนาบที่มีระยะห่างคงตัวกับจุดศูนย์กลาง (Center) หรือ c ระยะห่างนั้นเรียกว่ารัศมี (Radius) หรือ r โดยวงกลมจะประกอบด้วยรูปร่างของส่วนโค้ง (Arc) แต่ละส่วนโค้งเชื่อมต่อกันเป็นเส้นรอบวง (Circumference) เส้นตรงจากจุดหนึ่งของเส้นรอบวงที่ลากผ่านจุดศูนย์กลางไปยังจุดหนึ่งของเส้นรอบวงเราจะเรียกเส้นนั้นว่า เส้นผ่านศูนย์กลาง (Diameter) ผลรวมของมุมภายในวงกลมเท่ากับ 360 องศา

สูตรหาพื้นที่พื้นที่วงกลม สามารถหาได้ดังนี้

สูตรที่ใช้ ค่า r ; $A = \pi r^2$

สูตรที่ใช้ ค่า D ; $A = \frac{\pi}{4} D^2$

สูตรหาความยาวเส้นรอบวง ; $= 2 \pi r$



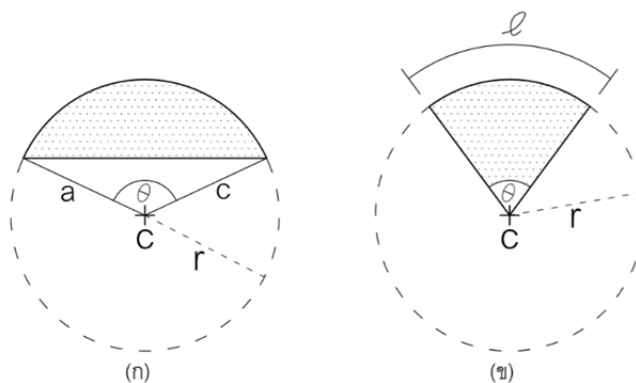
รูปที่ 9.29 รูปวงกลมและวงแหวน

2. **วงแหวน (Circular ring)** คือรูปวงกลมที่มีสองวงแต่มีจุดศูนย์กลางเดียวกัน เรียกว่า วงแหวน (Circular ring) แสดงดังรูปที่ 9.29(ข) โดยแต่ละวงกลมก็จะมีค่ารัศมีของแต่ละวง เราจะหาพื้นที่ที่แรเงาได้จาก

สูตรหาพื้นที่ $A = \pi(r_1^2 - r_2^2)$

3. **ชิ้นส่วนของวงกลม (Circular segment)** แสดงดังรูปที่ 9.30(ก) เป็นพื้นที่ส่วนหนึ่งของวงกลมที่มีค่าน้อยกว่าพื้นที่ครึ่งวงกลม

สูตรหาพื้นที่ $A = \left(\pi r^2 \frac{\theta}{360} \right) - \left(\frac{1}{2} (a \times c) \sin \theta \right)$



รูปที่ 9.30 รูปชิ้นส่วนวงกลมและรูปภาคตัด

4. รูปตัดวงกลม (Circular sector) แสดงดังรูปที่ 9.30(ข) เป็นพื้นส่วนหนึ่งของวงกลมที่อยู่ระหว่างรัศมีสองเส้นกับส่วนของเส้นรอบวง บางกรณีอาจเรียกว่าสามเหลี่ยมฐานโค้ง

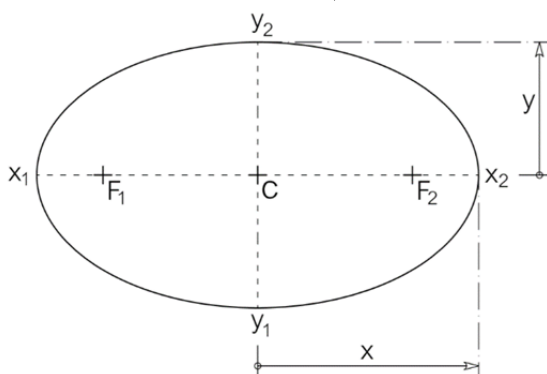
$$\text{สูตรหาพื้นที่ } A = \frac{1}{2}(r \ell)$$

$$\text{สูตรหาความยาวส่วนโค้ง ; } \ell = \frac{\theta}{180}(\pi r)$$

5. วงรี (Ellipse) เป็นเส้นโค้งทางคณิตศาสตร์ซึ่งล้อมรอบจุดโฟกัสสองจุดและทำให้ผลรวมของระยะทางจากจุดบนเส้นโค้งไปหาจุดโฟกัสแต่ละจุดเป็นค่าคงที่ พิจารณารูปที่ 9.31 ประกอบ จุด F_1 และจุด F_2 เป็นจุดโฟกัสของรูป เมื่อเรลากเส้นตรงแนวนอนจากเส้นรอบวงรีที่จุด x_1 ผ่านจุดโฟกัสทั้งสองไปยังเส้นรอบวงรีที่จุด x_2 แนวเส้นตรงที่ได้นี้คือ แกนเอก (Major axis) จุดที่ตัดวงรี x_1 และ x_2 จะเรียกว่าจุดยอด แกนเอกจะตัดผ่านจุดโฟกัสแล้วยังตัดผ่านจุดศูนย์กลางของรูปที่จุด C จากจุดนี้ลากเส้นตั้งฉากลงมาตัดกับวงรีที่จุด y_1 และลากขึ้นข้างบนตัดกับวงรีที่จุด y_2 แนวเส้นตรงที่ได้นี้คือ แกนโท (Minor axis) เมื่อเราต้องการหาพื้นที่ของวงรีจะใช้ความยาวครึ่งของทั้งแกนเอกและแกนโทมาเข้าสู่สูตร

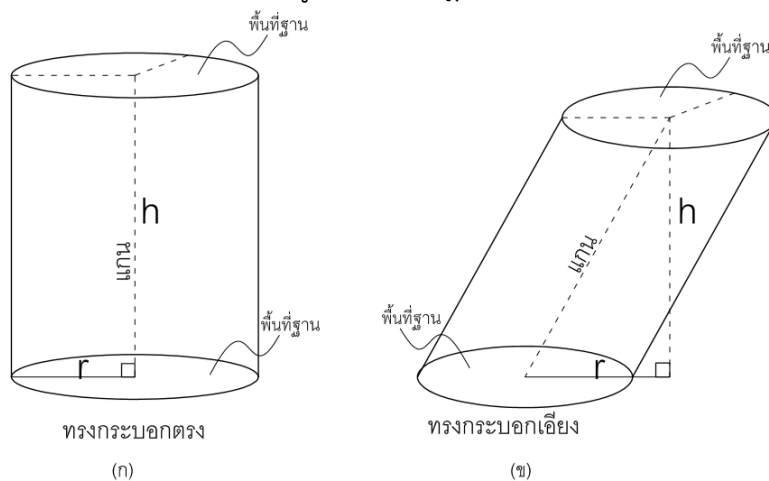
$$\text{สูตรหาพื้นที่ } A = \pi(xy)$$

$$\text{สูตรหาความยาวเส้นรอบวง ; } = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$$



4.8. ปริมาตรรูปเรขาคณิต

ปริมาตร (Volume) เป็นอาณาบริเวณหนึ่งมีรูปทรงเป็นเรขาคณิตที่มีมิติ วิธีการหาพื้นที่จะเป็นการคูณกันของด้านกว้าง ด้านยาวและด้านสูง หรือจากกฎของเรขาคณิตแสดงดังต่อไปนี้



(n)

(ข)

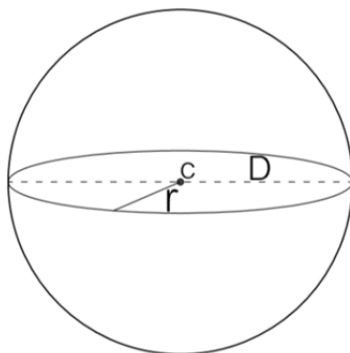
รูปที่ 9.32 ทรงกระบอกตรงและทรงกระบอกเอียง

1. **ทรงกระบอก (Cylinder)** เป็นรูปเรขาคณิตสามมิติที่มีหน้าตัดหรือฐานเป็นรูปวงกลมในระนาบที่ขนานกันและทุกหน้าตัดมีความเท่ากันทุกประการ แบ่งออกได้เป็นทรงกระบอกตรง แสดงดังรูปที่ 9.32(ก) ที่ประกอบด้วยพื้นที่หน้าตัดวงกลมที่มีรัศมี r และแกนตรงหรือความสูง h สำหรับทรงกระบอกเอียง แสดงดังรูปที่ 9.32(ข) เป็นหน้าตัดวงกลมที่มีความเท่ากันทุกประการตลอดแกน แต่แกนนี้จะเป็นแกนเอียง การหาระยะความสูง h และรัศมี r จะได้จากการเขียนสามเหลี่ยมมุมฉากขึ้น พื้นที่ผิวและปริมาตรหาได้ดังนี้

$$\text{พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก} = 2\pi(r \times h) \quad \text{หรือ} \quad \text{ความยาวเส้นรอบวง} \times \text{ความสูง}$$

$$\text{พื้นที่ผิวของทรงกระบอก} = 2\pi(rh + r^2) \quad \text{หรือ} \quad \text{พื้นที่ผิวข้าง} + \text{พื้นที่ฐานสองด้าน}$$

$$\text{ปริมาตรของทรงกระบอก} = \pi(r^2 \times h) \quad \text{หรือ} \quad \text{พื้นที่ฐานหนึ่งด้าน} \times \text{ความสูง}$$



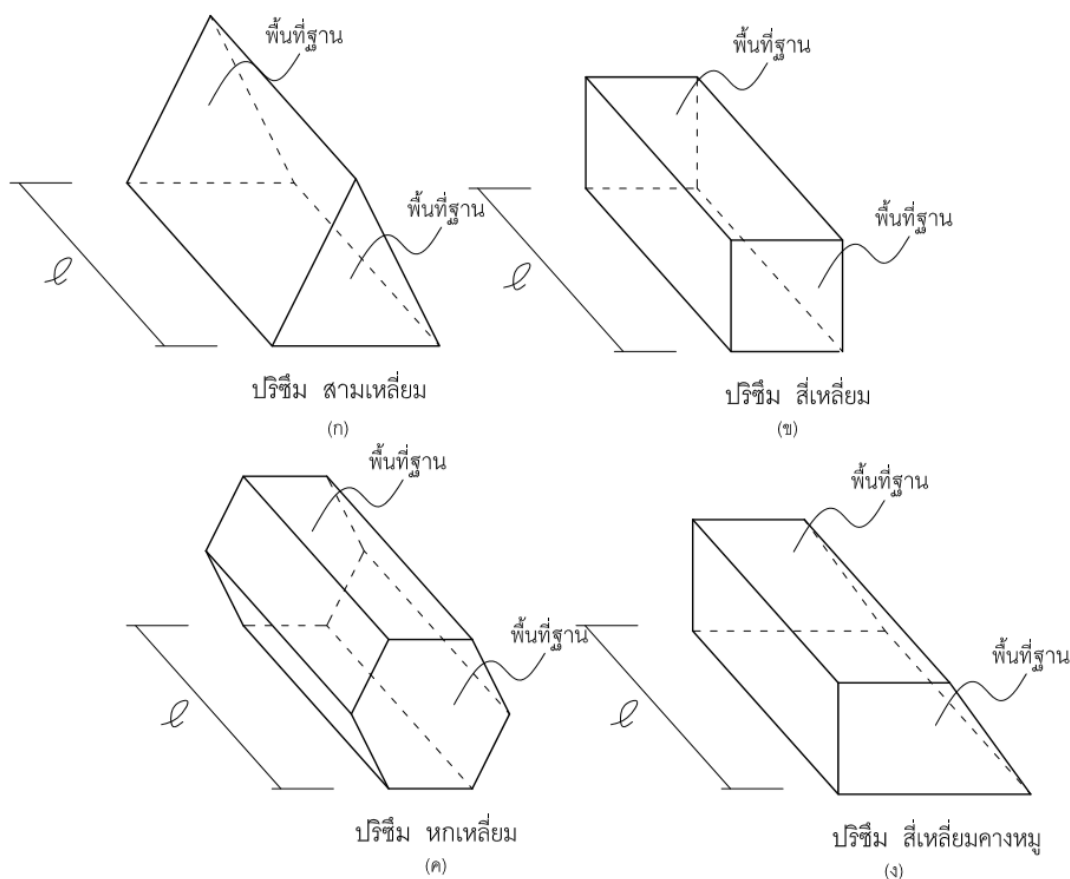
รูปที่ 9.33 ทรงกลม

2. **ทรงกลม (Sphere)** เป็นรูปเรขาคณิตสามมิติที่มีพื้นผิวเรียบโค้ง จุดทุกจุดที่อยู่บนพื้นผิวโค้งจะมีระยะห่างจากจุดศูนย์กลางของทรงกลมหรือ จุด c เท่ากันในทุกจุดคือระยะรัศมีของทรงกลม หรือ r เส้นที่ลากผ่านจุดบนพื้นผิวทรงกลมหนึ่งผ่านจุด c และไปบรรจบกับจุดบนพื้นผิวโค้งอีกด้านหนึ่งเรียกว่า เส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลมหรือ D พื้นที่ผิวและปริมาตรหาได้ดังนี้

$$\text{พื้นที่ผิวของทรงกลม} = 4\pi r^2$$

$$\text{ปริมาตรของทรงกลม} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

3. **ปริซึม (Prism)** เป็นรูปเรขาคณิตสามมิติที่มีหน้าตัดหรือฐานเป็นรูปเรขาคณิตหลายเหลี่ยมสองด้านที่ขนานกันอยู่โดยหน้าตัดถูกเชื่อมต่อกันด้วยระยะความยาวเป็นลักษณะแท่ง มีชื่อเรียกตามลักษณะของหน้าตัดหรือฐานรูปเรขาคณิต รูปที่ 9.34(ก) แสดงรูปปริซึมสามเหลี่ยม รูปที่ 9.34(ข) แสดงรูปปริซึมสี่เหลี่ยม รูปที่ 9.34(ค) แสดงรูปปริซึมหกเหลี่ยม และ รูปที่ 9.34(ง) แสดงรูปปริซึมสี่เหลี่ยมคางหมู พื้นที่ผิวและปริมาตรหาได้ดังนี้

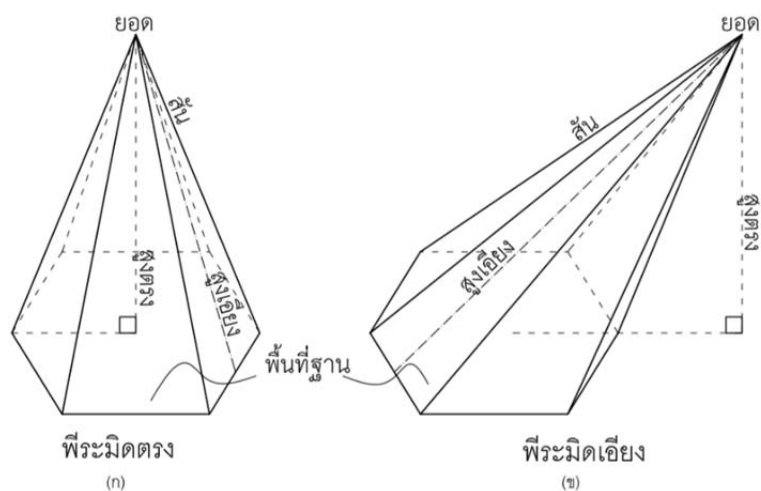


รูปที่ 9.34 ปริซึม

$$\begin{aligned}
 \text{พื้นที่ผิวข้างของปริซึม} &= \text{ความยาวเส้นรอบฐาน} \times l \\
 \text{พื้นที่ผิวของปริซึม} &= \text{พื้นที่ผิวข้างของปริซึม} + \text{พื้นที่ฐานสองด้าน} \\
 \text{ปริมาตรของปริซึม} &= \text{พื้นที่ฐานหนึ่งด้าน} \times l
 \end{aligned}$$

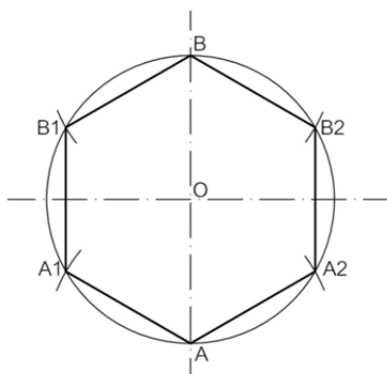
4. **พีระมิด (Pyramid)** เป็นรูปเรขาคณิตสามมิติที่มีฐานเป็นรูปเรขาคณิตหลายเหลี่ยมมีพื้นผิวด้านข้างเป็นรูปสามเหลี่ยมหลายๆรูปที่มีจุดยอดร่วมกัน ซึ่งจะเรียกตามลักษณะของฐาน โดยพีระมิดจะแบ่งออกได้ 2 ลักษณะ คือ พีระมิดตรงแสดงดังรูปที่ 9.35(ก) ฐานจะเป็นรูปเหลี่ยมมีด้านทุกด้านเท่ากัน ความสูงวัดจากจุดกึ่งกลางฐานเป็นแนวตั้งฉากไปหาจุดยอด ด้านข้างจะเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทุกหน้า สำหรับรูปที่ 9.35(ข) พีระมิดเอียง สันแต่ละแนวยาวไม่เท่ากัน ด้านข้างจะเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีบางด้านไม่เท่ากัน การหาความสูงตรงต้องใช้วิธีการสร้างสามเหลี่ยมมุมฉากเข้าช่วย พื้นที่ผิวและปริมาตรหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \text{พื้นที่ผิวข้าง 1 ด้านของพีระมิด} &= \frac{1}{2} \times \text{ความยาวฐาน 1 ด้าน} \times \text{สูงเอียง} \\
 \text{พื้นที่ผิวของพีระมิด} &= \text{พื้นที่ผิวข้างทุกด้าน} + \text{พื้นที่ฐาน} \\
 \text{ปริมาตรของพีระมิด} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูงตรง}
 \end{aligned}$$



รูปที่ 9.35 พีระมิด

ตัวอย่างที่ 9.1 จากการสร้างรูปหกเหลี่ยมจงตอบคำถามต่อไปนี้



รูปที่ 9.39

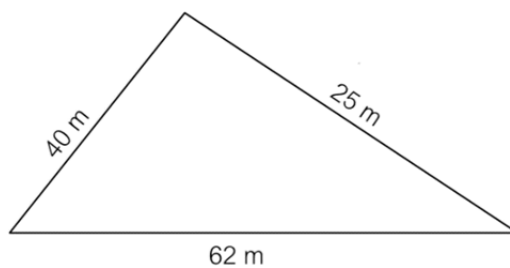
1. อธิบายการสร้างจุด A_1 และ A_2

ตอบ ให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง กางวงเวียนให้มีรัศมีเท่ากับ AO แล้วลากเส้นวงเวียนมาตัดกับเส้นรอบวงกลมที่จุด A_1 และ A_2

2. อธิบายการสร้างจุด B_1 และ B_2

ตอบ ให้จุด B เป็นจุดศูนย์กลาง กางวงเวียนให้มีรัศมีเท่ากับ BO แล้วลากเส้นวงเวียนมาตัดกับเส้นรอบวงกลมที่จุด B_1 และ B_2

ตัวอย่างที่ 9.2 จากรูปเรขาคณิต จงคำนวณหาพื้นที่ทั้งหมดของรูปดังกล่าว



รูปที่ 9.40

วิธีทำ

จากโจทย์รูปสามเหลี่ยม (Triangle) ให้นิหาความยาวด้านทั้งสามด้าน

โดยที่

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$s = \frac{1}{2}(25 \text{ m} + 62 \text{ m} + 40 \text{ m}) = 63.5 \text{ m}$$

สูตรหาพื้นที่

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

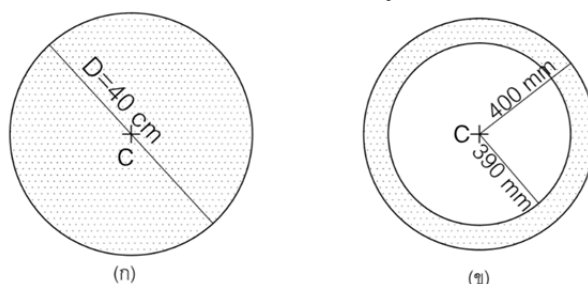
$$A = \sqrt{63.5 \text{ m}(63.5 \text{ m} - 25 \text{ m})(63.5 \text{ m} - 62 \text{ m})(63.5 \text{ m} - 40 \text{ m})}$$

$$A = \sqrt{63.5 \text{ m} \times 38.5 \text{ m} \times 1.5 \text{ m} \times 23.5 \text{ m}}$$

$$A = (86177 \text{ m}^4)^{\frac{1}{2}}$$

$$A = 293.6 \text{ m}^2 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 9.3 จากรูปเรขาคณิต จงคำนวณหาพื้นที่แรเงาของรูปดังกล่าว



รูปที่ 9.41

วิธีทำ

รูป 9.41(ก) วงกลม หาพื้นที่โดยสูตรที่ใช้ ค่า D ;

$$A = \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi}{4} (40 \text{ cm})^2$$

$$A = 1256.6 \text{ cm}^2 \quad \text{ตอบ}$$

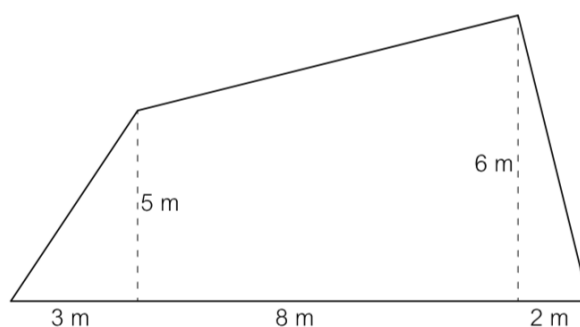
รูป 9.41(ข) วงแหวน หาพื้นที่โดยสูตร ;

$$A = \pi(r_1^2 - r_2^2)$$

$$A = \pi[(400 \text{ mm})^2 - (390 \text{ mm})^2]$$

$$A = 24818.6 \text{ mm}^2 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 9.4 จากรูปเรขาคณิต จงคำนวณหาพื้นที่ทั้งหมดของรูปดังกล่าว



รูปที่ 9.42

วิธีทำ

จากพื้นที่รูปทั้งหมดแบ่งรูปให้เป็น 3 รูป คือ สองรูปด้านข้างจะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสำหรับรูปกลางจะพิจารณาให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

รูปสามเหลี่ยม กรณิทราบความสูงตั้งฉาก (h) และความยาวฐาน (b)

สูตรหาพื้นที่

$$A = \frac{1}{2}(b \times h)$$

$$A = \frac{1}{2} \times [(3 \text{ m} \times 5 \text{ m}) + (2 \text{ m} \times 6 \text{ m})]$$

$$A = 13.5 \text{ m}^2$$

รูปสี่เหลี่ยมคางหมู สูตรหาพื้นที่

$$A = \frac{1}{2}(a + b)h$$

$$A = \frac{1}{2} \times (5 \text{ m} + 6 \text{ m}) \times 8 \text{ m}$$

$$A = 44 \text{ m}^2$$

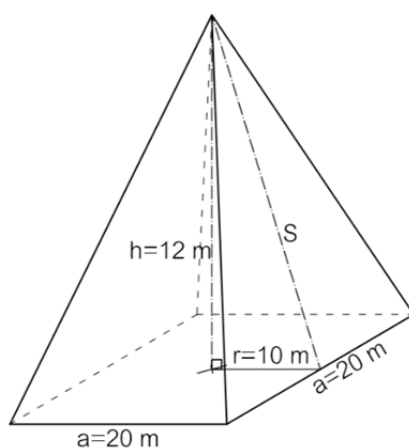
รวมพื้นที่ทั้งหมด

$$A = 13.5 \text{ m}^2 + 44 \text{ m}^2 = 57.5 \text{ m}^2$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 9.5 จากรูปพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส จงคำนวณหาพื้นที่ผิวทั้งสี่ด้าน

วิธีทำ



รูปที่ 9.45

สูตรหาพื้นที่ผิวข้าง 1 ด้านของพีระมิด

$$= \frac{1}{2} \times \text{ความยาวฐาน 1 ด้าน} \times \text{สูงเอียง}$$

ต้องหาความสูงเอียง

$$S = \sqrt{(10 \text{ m})^2 + (12 \text{ m})^2} = 15.6 \text{ m}$$

พื้นที่ผิวข้าง 1 ด้าน

$$= \frac{1}{2} \times 20 \text{ m} \times 15.6 \text{ m} = 156 \text{ m}^2$$

พื้นที่ผิวทั้งสี่ด้าน

$$A = 4 \times 156 \text{ m}^2 = 624 \text{ m}^2$$

ตอบ

5. กิจกรรมการเรียนรู้

ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูอธิบายเกี่ยวกับสาระสำคัญและจุดประสงค์การเรียนรู้
2. นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนหน่วยการเรียนรู้ที่ 9

ขั้นสอน

3. ครูอธิบายเนื้อหาและให้ความรู้ ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 9 เรขาคณิต พื้นที่และปริมาตร
4. นักเรียนทำแบบทดสอบหน่วยที่ 9 ในหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ช่างโยธา

ขั้นสรุปและการประยุกต์

5. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบประเมินผลการเรียนรู้บทที่ 9 พร้อมกับสรุปบทเรียนร่วมกัน

6. สื่อการเรียนรู้

เอกชัย รัตนโน. คณิตศาสตร์ช่างโยธา (Mathematics for Civil Work) รหัสวิชา 20121-1001, พิมพ์และจัดจำหน่ายโดย บริษัท ซีเอ็ดดูเคชั่น จำกัด (มหาชน), พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2565

7. การวัดผลประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 9
3. สังเกตและประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 9
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยอาจารย์และนักศึกษา ร่วมกันประเมิน

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล เกณฑ์ผ่าน ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้หน่วยที่ 9 เกณฑ์ผ่าน ทำถูกต้อง 60% ขึ้นไป
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับการ ประเมินตามสภาพจริง

8. กิจกรรมเสนอแนะ/งานที่มอบหมาย

8.1 กิจกรรมเสนอแนะ

8.1.1 ให้นักศึกษาค้นคว้าหาข้อมูลเพิ่มเติม นอกเหนือจากเนื้อหาบทเรียนที่เรียนมาทางอินเทอร์เน็ต

8.1.2 ให้นักศึกษาสังเกตสิ่งรอบตัว ทั้งในวิทยาลัยฯ และภายนอก ว่ามีสิ่งใดบ้างที่สัมพันธ์กับเนื้อหาบทเรียนที่เรียนมา

8.2 งานที่มอบหมาย

ทำในหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ช่วงโยธา บทที่ 9 เรขาคณิต พื้นที่และปริมาตร

8.2.1 แบบทดสอบก่อนเรียนบทที่ 9 เรขาคณิต พื้นที่และปริมาตร

8.2.2 แบบประเมินผลการเรียนรู้บทที่ 9 เรขาคณิต พื้นที่และปริมาตร

8.2.3 แบบทดสอบหลังเรียนบทที่ 9 เรขาคณิต พื้นที่และปริมาตร

9. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

1. ผลการใช้แผนการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

2. ผลการเรียนรู้ของนักเรียน/ผลการสอนของครู/ปัญหาที่พบ

.....

.....

.....

.....

3. แนวทางการแก้ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ตัวแทนนักเรียน

ลงชื่อ.....

(.....)

ครูผู้สอน

การประเมินผล บทที่ 9 เรขาคณิต พื้นที่และปริมาตร

คำชี้แจง : คะแนนรวมต่อบท 100 คะแนนเต็ม

1. แบบฝึกหัด จำนวน 10 ข้อ ข้อละ คะแนน รวม คะแนน
2. แบบประเมินผลก่อนและหลังการเรียนรู้ จำนวน 10 ข้อ ข้อละ คะแนน รวม คะแนน
3. ประเมินจิตพิสัยตามสภาพจริง 20 คะแนน

แบบวัดผล							
บทที่ 9 เรขาคณิต พื้นที่และปริมาตร							
ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา รหัสวิชา 20121-1001					วิทยาลัย		
ชื่อ-สกุล..... ระดับ.....					ครู		
ที่	รายการประเมิน	คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน		คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน		คะแนนแบบฝึกหัด	
		คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้		
1	เรขาคณิต						
2	เครื่องมือที่ใช้ในการเขียนรูปเรขาคณิต						
3	เส้นตรง						
4	รูปสามเหลี่ยม						
5	รูปหลายเหลี่ยม						
6	รูปวงรี						
7	พื้นที่รูปเรขาคณิต						
8	ปริมาตรรูปเรขาคณิต						
9							
10							
11							
12							
รวมคะแนนด้านทักษะ		10		10		60	
13	ความขยันหมั่นเพียร ความวิริยะอุตสาหะ					10	
14	ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์สุจริต					10	
รวมคะแนนทั้งหมด				100		รวม	

เฉลยแบบฝึกหัด

ชีววิทยา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา

รหัสวิชา 20121-1001 ท-ป-น 2-0-2

หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2562

โดย

เอกชัย รัตนโน

จัดทำโดย



บริษัท ซีเอดยูเคชั่น จำกัด (มหาชน)
SE-EDUCATION PUBLIC COMPANY LIMITED

แบบทดสอบก่อนเรียนบทที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Function)

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย × ทับลงบนตัวอักษร ก ข ค ง ที่ถูกต้องที่สุดเพียงหนึ่งข้อเท่านั้น
(คะแนนรวม 10 คะแนน)

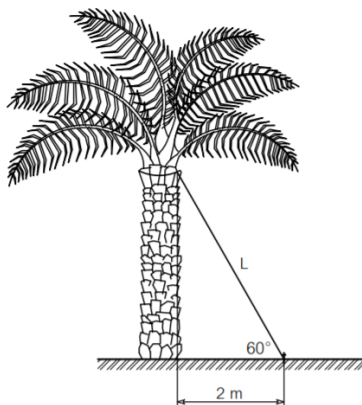
1. สามารถใช้ตารางตรีโกณมิติได้ (ภาคผนวก)
2. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด

1. จาก $\left(\frac{2}{5}\right)\pi$ ข้อใดคือหน่วยของศาของปริมาณนี้

- | | |
|-----------------|---------------|
| ก. 52° | ข. 62° |
| ✗ ค. 72° | ง. 82° |

2. จาก 35.56° ข้อใดคือค่าของปริมาณนี้ในรูปของหน่วยของศา ลิปดา และฟิลิปดา

- ✗ ก. $35^\circ 33' 36''$
- ข. $35^\circ 18' 22''$
- ค. $35^\circ 50' 6''$
- ง. $35^\circ 43' 16''$



ใช้ตอบคำถามข้อที่ 3

3. ข้อใดคือความยาวของเส้นเชือก (L)

- | | |
|-------------|-----------|
| ก. 2.00 m | ข. 3.00 m |
| ✗ ค. 4.00 m | ง. 5.00 m |

2 คณิตศาสตร์ช่างโยธา

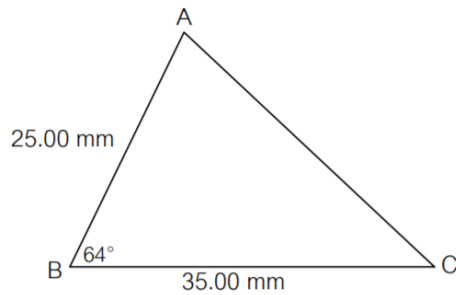
4. จากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ (ภาคผนวก) ข้อใดคือปริมาณของ $\sin 55^\circ 42'$

☒ 0.8261

ข. 0.2392

ค. 0.4573

ง. 0.6602



ใช้ตอบคำถามข้อที่ 5, 6

5. ข้อใดคือความยาวด้าน AC

☒ 32.91 mm

ข. 42.91 mm

ค. 52.91 mm

ง. 62.91 mm

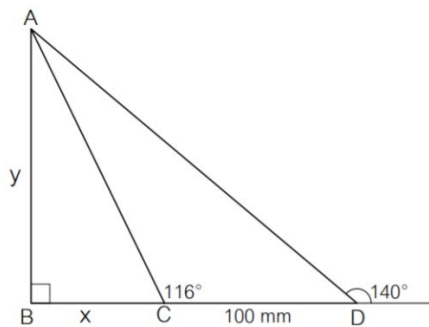
6. ข้อใดคือค่ามุม C

ก. 23.063°

ข. 33.063°

☒ 43.063°

ง. 53.063°



ใช้ตอบคำถามข้อที่ 7, 8

7. ข้อใดคือค่า x

ก. 49.3 mm

ข. 59.33 mm

☒ 69.33 mm

ง. 79.33 mm

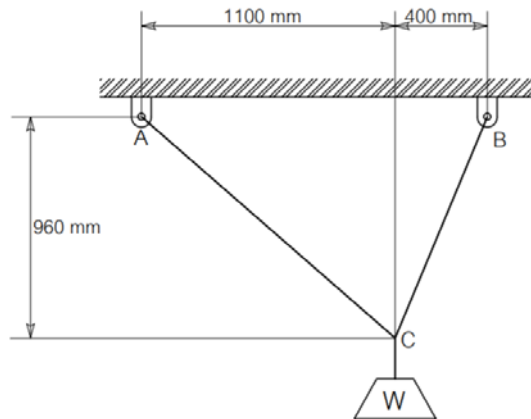
8. ข้อใดคือค่า y

ก. 102 mm

ข. 122 mm

~~ค. 142 mm~~

ง. 162 mm



ใช้ตอบคำถามข้อที่ 9, 10

9. กำหนดให้ $W = 500$ N ข้อใดคือแรงในท่อนเหล็ก AC

~~ก. 202.779 N~~

ข. 573.612 N

ค. 397.222 N

ง. 406.112 N

10. กำหนดให้ $W = 500$ N ข้อใดคือแรงในท่อนเหล็ก BC

ก. 202.779 N

ข. 573.612 N

~~ค. 397.222 N~~

ง. 406.112 N

แบบฝึกหัดบทที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

คำสั่ง แบบฝึกหัดจำนวนทั้งหมด 20 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน รวม 60 คะแนน (ห้ามใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด)

1. จงหาค่าของ $\sin^2 \frac{\pi}{2} + 5 \sin^2 \frac{\pi}{2} - \cos 2\pi$

5

2. จากค่ามุม $\frac{8}{9}\pi$ rad จงทำให้เป็นหน่วยองศา

160°

3. จากค่ามุม 62.855° จงทำให้อยู่ในรูปของหน่วยองศา ลิปดา และฟิลิปดา

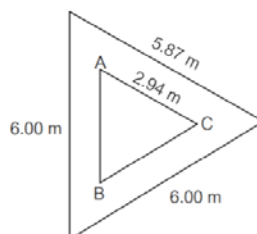
62°51'18"

4. จากค่ามุม 31° 31' 12" จงทำให้อยู่ในรูปของหน่วยองศาที่มีจำนวนทศนิยม

31.52°

5. จากรูป 1.44 จงคำนวณหาระยะด้าน AB และ AC

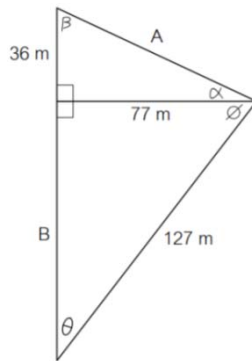
AB = 3.00 m, AC = 3.00 m



รูป 1.44

6. จากรูป 1.45 จงใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสคำนวณหาความยาวด้าน A และ B

$$A = 85 \text{ m}, \quad B = 101 \text{ m}$$



รูป 1.45

7. จากรูป 1.45 จงใช้ตรีโกณมิติหาค่ามุมต่าง ๆ ในรูปโดยการเปิดค่าในตาราง

$$\alpha = 25.058^\circ, \quad \beta = 64.942^\circ, \quad \theta = 37.321^\circ, \quad \phi = 52.679^\circ$$

8. จงใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ (ภาคผนวก) คำนวณหาค่า $\sin 40^\circ 35'$

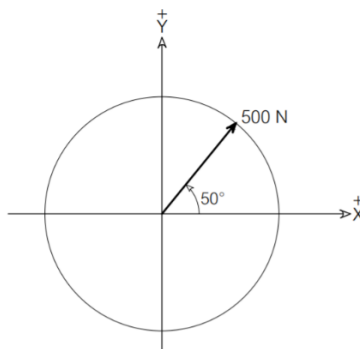
$$0.6506$$

9. จงใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ (ภาคผนวก) คำนวณหาค่า $\cos 85^\circ 11'$

$$0.0840$$

10. จากรูป 1.46 จงใช้วิธีการตรีโกณมิติหาองค์ประกอบของแรงในแนวแกน x และแกน y และใช้ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส ตรวจสอบคำตอบ

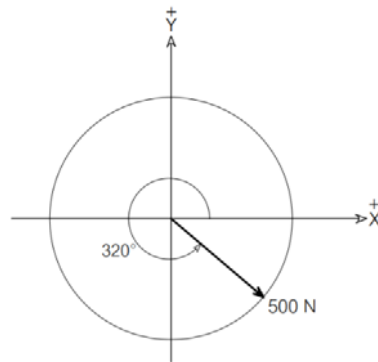
$$F_x = 321.394 \text{ N}, \quad F_y = 383.022 \text{ N}$$



รูปที่ 1.46

11. จากรูป 1.47 จงใช้วิธีการทางตรีโกณมิติหาค่าประกอบของแรงในแนวแกน x และแกน y และใช้ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส ตรวจสอบคำตอบ

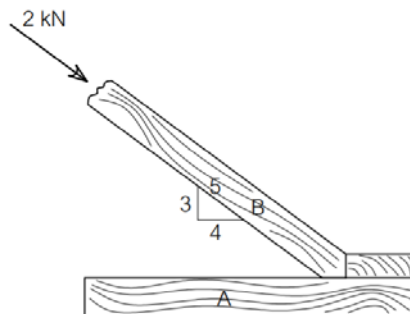
$$F_x = 383.022 \text{ N}, \quad F_y = -321.394 \text{ N}$$



รูปที่ 1.47

12. จากรูป 1.48 จงใช้วิธีการทางตรีโกณมิติหาค่าประกอบของแรงในไม้ท่อน A และในไม้ท่อน B และใช้ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส ตรวจสอบคำตอบ

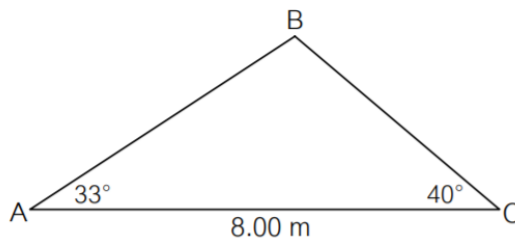
$$A = 1.6 \text{ kN}, \quad B = 2 \text{ kN}$$



รูปที่ 1.48

13. จากรูป 1.49 จงหาระยะความยาวด้าน AB และ CB

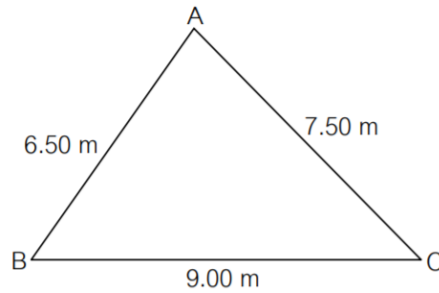
$$AB = 5.377 \text{ m}, \quad BC = 4.556 \text{ m}$$



รูปที่ 1.49

14. จากรูป 1.50 จงหาค่ามุมของมุม A, B และ C

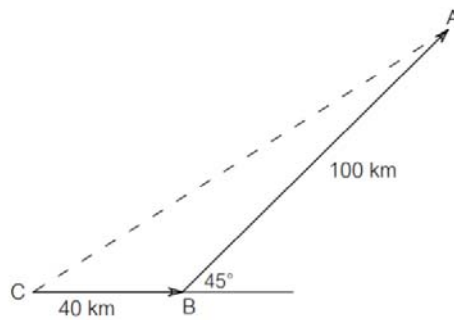
$$A = 79.66^\circ, \quad B = 55.06^\circ, \quad C = 45.28^\circ$$



รูปที่ 1.50

15. จากรูป 1.51 แสดงเวกเตอร์ (หางต่อหัว) จงหาระยะทางจาก C ไป A และค่ามุม C

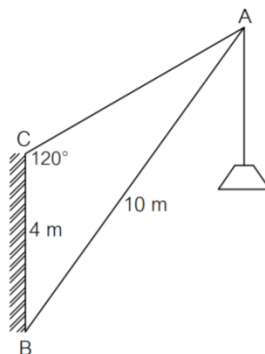
$$CA = 131.4 \text{ km}, \quad C = 32.55^\circ$$



รูปที่ 1.51

16. จากรูป 1.52 แสดงปั้นจั่น (Jib of a crane) จงหาระยะทางจาก C ไป A และค่ามุม B

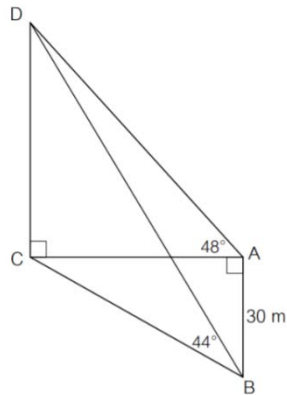
$$CA = 7.38 \text{ m}, \quad B = 39.73^\circ$$



รูปที่ 1.52

17. จากรูป 1.53 จากการทำสำรวจ (A surveyor positioned) จงหาระยะความสูงจาก C ไป D

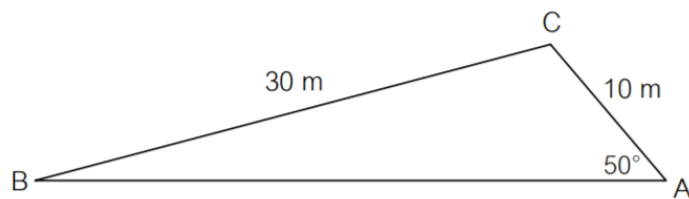
CD = 58.65 m



รูปที่ 1.53

18. จากรูป 1.54 จงหาระยะ AB

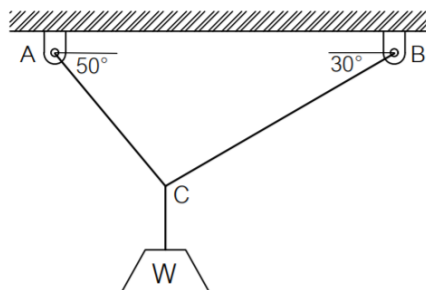
AB = 35.43 m



รูปที่ 1.54

19. จากรูป 1.55 กำหนดให้ $W = 500 \text{ N}$ จงคำนวณหาแรงในเส้นเชือก AC และ BC

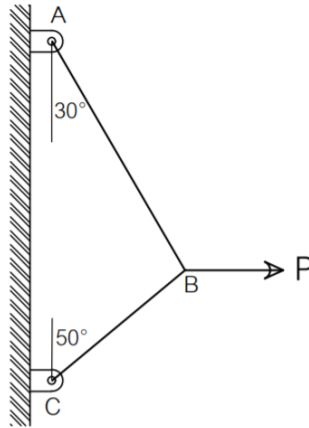
AC = 439.7 N, BC = 326.4 N



รูปที่ 1.55

20. จากรูป 1.56 กำหนดให้ $P = 3 \text{ kN}$ จงคำนวณหาแรงในเส้นเชือก AC และ BC

$BC = 2.638 \text{ kN}, \quad AB = 1.958 \text{ kN}$



รูปที่ 1.56

แบบทดสอบหลังเรียนบทที่ 1 พังก์ชันตรีโกณมิติ

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย × ทับลงบนตัวอักษร ก ข ค ง ที่ถูกต้องที่สุดเพียงหนึ่งข้อเท่านั้น
(คะแนนรวม 10 คะแนน)

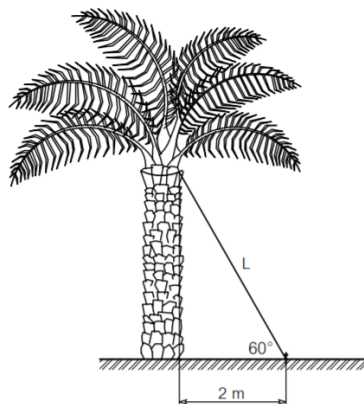
1. สามารถใช้ตารางตรีโกณมิติได้ (ภาคผนวก)
2. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด

1. จาก $\left(\frac{2}{5}\right)\pi$ ข้อใดคือหน่วยของศาของปริมาณนี้

- | | |
|-------------------------------------|---------------|
| ก. 52° | ข. 62° |
| ~~ค. 72°~~ | ง. 82° |

2. จาก 35.56° ข้อใดคือค่าของปริมาณนี้ในรูปของหน่วยองศา ลิปดา และฟิลิปดา

- | | |
|--|------------------------|
| ~~ก. $35^\circ 33' 36''$~~ | ข. $35^\circ 18' 22''$ |
| ค. $35^\circ 50' 6''$ | ง. $35^\circ 43' 16''$ |



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 3

3. ข้อใดคือความยาวของเส้นเชือก (L)

- | | |
|----------------------|-----------|
| ก. 2.00 m | ข. 3.00 m |
| ~~ค. 4.00 m~~ | ง. 5.00 m |

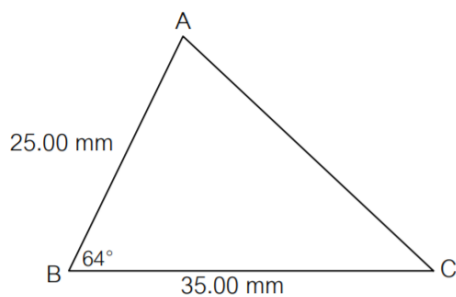
4. จากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ (ภาคผนวก) ข้อใดคือปริมาณของ $\sin 55^\circ 42'$

☒ 0.8261

ข. 0.2392

ค. 0.4573

ง. 0.6602



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 5, 6

5. ข้อใดคือความยาวด้าน AC

☒ 32.91 mm

ข. 42.91 mm

ค. 52.91 mm

ง. 62.91 mm

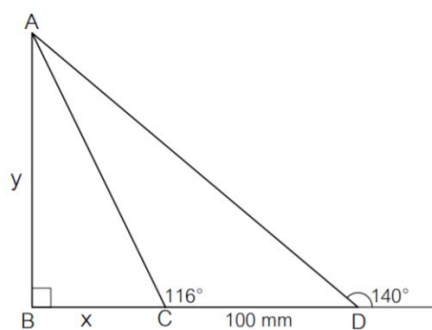
6. ข้อใดคือค่ามุม C

ก. 23.063°

ข. 33.063°

☒ 43.063°

ง. 53.063°



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 7, 8

7. ข้อใดคือค่า x

ก. 49.3 mm

ข. 59.33 mm

☒ 69.33 mm

ง. 79.33 mm

12 คณิตศาสตร์ช่างโยธา

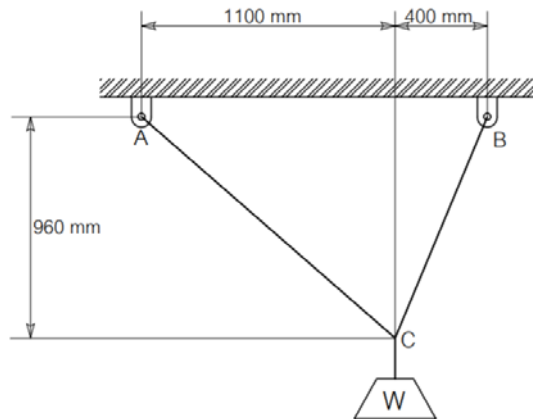
8. ข้อใดคือค่า y

ก. 102 mm

ข. 122 mm

~~ค. 142 mm~~

ง. 162 mm



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 9, 10

9. กำหนดให้ $W = 500$ N ข้อใดคือแรงในท่อนเหล็ก AC

~~ก. 202.779 N~~

ข. 573.612 N

ค. 397.222 N

ง. 406.112 N

10. กำหนดให้ $W = 500$ N ข้อใดคือแรงในท่อนเหล็ก BC

ก. 202.779 N

ข. 573.612 N

~~ค. 397.222 N~~

ง. 406.112 N

แบบวัดผล บทที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Function)							
ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา รหัสวิชา 20121-1001				วิทยาลัย			
ชื่อ-สกุล..... ระดับ.....				ครู			
ที่	รายการประเมิน	คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน		คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน		คะแนนแบบฝึกหัด	
		คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้		
1	ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์						
2	มุม						
3	ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ในจุดภาค						
4	ตรีโกณมิติของสามเหลี่ยม						
5	กรณีพิเศษของสามเหลี่ยม						
6	เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติ						
7	ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ						
8	กฎของไซน์และโคไซน์						
9	กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ						
10							
11							
12							
รวมคะแนนด้านทักษะ		10		10		60	
13	ความขยันหมั่นเพียร ความวิริยะอุตสาหะ					10	
14	ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์สุจริต					10	
รวมคะแนนทั้งหมด				100		รวม	

แบบทดสอบก่อนเรียนบทที่ 2 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว (Single Variable Linear Equation)

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย × ทับลงบนตัวอักษร ก ข ค ง ที่ถูกต้องที่สุดเพียงหนึ่งข้อเท่านั้น
(คะแนนรวม 10 คะแนน) ห้ามใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด

1. จากสมการ $-x + 1 = 0$ ข้อใดคือค่าของ x

- | | |
|-------|----------------|
| ก. 0 | ✗ +1 |
| ค. -1 | ง. หาค่าไม่ได้ |

2. จากสมการ $3x + \frac{1}{5} = 0$ ข้อใดคือค่าของ x

- | | |
|----------------------|------------------|
| ก. $\frac{1}{10}$ | ข. $\frac{3}{5}$ |
| ✗ ค. $-\frac{1}{15}$ | ง. -5 |

3. จากสมการ $2x - 15 = 3$ ข้อใดคือค่าของ x

- | | |
|------|--------|
| ก. 3 | ข. 5 |
| ค. 7 | ✗ ง. 9 |

4. จากสมการ $7x - 2 = 4x + 25$ ข้อใดคือค่าของ x

- | | |
|------|--------|
| ก. 3 | ข. 5 |
| ค. 7 | ✗ ง. 9 |

5. จาก $4(x + 5) - 6(2x + 3) = 3(x + 14) - 2(5 - x) + 9$ ข้อใดคือค่าของ x

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| ✗ ค. $\frac{21}{-13}$ | ข. $-\frac{21}{(-13)}$ |
| ค. $\frac{11}{-13}$ | ง. $-\frac{11}{(-13)}$ |

6. จาก $\frac{2x+1}{3} - \frac{2x+5}{5} = 2 + \frac{x-1}{6}$ ข้อใดคือค่าของ x

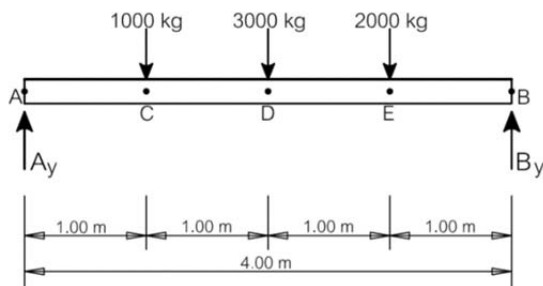
- | | |
|---------|--------|
| ✗ ค. 25 | ข. -25 |
| ค. 30 | ง. -30 |

2 คณิตศาสตร์เชิงโยธา

7. จาก $\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x} = \frac{5}{x-4}$ ข้อใดคือค่าของ x

- ก. $\frac{1}{2}$ ✗ $1\frac{1}{2}$
 ค. $\frac{2}{3}$ ง. $\frac{3}{4}$

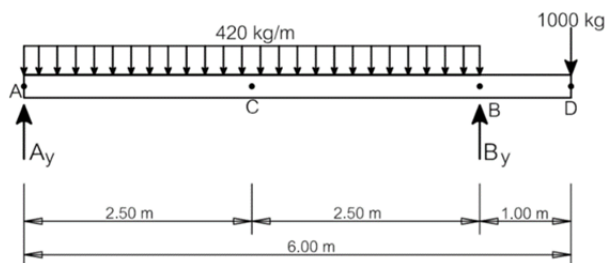
8. จากรูปคานช่วงเดียวอย่างง่าย ข้อใดคือค่าของ A_y และ B_y



รูปใช้ตอบคำถามข้อ 8

- ✗ $A_y = 2750 \text{ kg}, B_y = 3250 \text{ kg}$ ข. $A_y = 1354 \text{ kg}, B_y = 4646 \text{ kg}$
 ค. $A_y = 2010 \text{ kg}, B_y = 3990 \text{ kg}$ ง. $A_y = 3125 \text{ kg}, B_y = 2875 \text{ kg}$

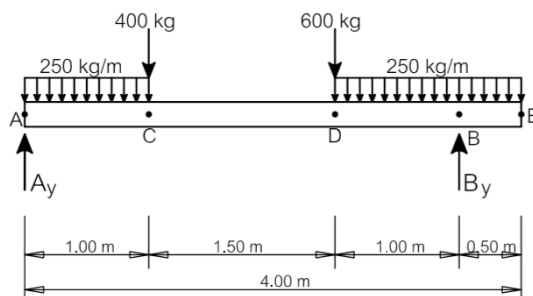
9. จากรูปคานช่วงเดียวปลายยื่นอย่างง่าย ข้อใดคือค่าของ A_y และ B_y



รูปใช้ตอบคำถามข้อ 9

- ก. $A_y = 2050 \text{ kg}, B_y = 1050 \text{ kg}$ ข. $A_y = 1500 \text{ kg}, B_y = 1600 \text{ kg}$
 ค. $A_y = 1050 \text{ kg}, B_y = 2050 \text{ kg}$ ✗ $A_y = 850 \text{ kg}, B_y = 2250 \text{ kg}$

10. จากรูปคานช่วงเดียวปลายยื่นอย่างง่าย ข้อใดคือค่าของ A_y และ B_y



รูปใช้ตอบคำถามข้อ 10

- ก. $A_y = 752.354 \text{ kg}$, $B_y = 872.646 \text{ kg}$
- ✗ ข. $A_y = 698.214 \text{ kg}$, $B_y = 926.786 \text{ kg}$
- ค. $A_y = 558.941 \text{ kg}$, $B_y = 1066.059 \text{ kg}$
- ง. $A_y = 490.788 \text{ kg}$, $B_y = 1134.212 \text{ kg}$

แบบฝึกหัดบทที่ 2 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

คำสั่ง แบบฝึกหัดจำนวนทั้งหมด 20 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน รวม 60 คะแนน (ห้ามใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด)

1. จงแก้สมการ $x + 4 = 16$

12

2. จงแก้สมการ $2x + 4 = 16$

6

3. จงแก้สมการ $\frac{x}{3} + 9 = 15$

18

4. จงแก้สมการ $4x + 1 = 3x - 15$

16

5. จงแก้สมการ $\frac{2+x}{5} = 6$

28

6. จงแก้สมการ $\frac{7(x+7)}{3} = 28$

5

7. จงแก้สมการ $\frac{2}{3}(x-3) = 20$

33

8. จงแก้สมการ $1.6x + 11 = 3.6x - 3$

7

9. จงแก้สมการ $\frac{8x}{3} = \frac{6x}{5} + 22$

15

10. จงแก้สมการ $10x - 1 - 7x + 6 = 16x - 21$

2

11. จงแก้สมการ $4.5(2 - 3x) + 0.8x = 2.3(x + 30)$

-4

12. จงแก้สมการ $\frac{2x-5}{2} + \frac{4-x}{4} = \frac{1}{4} + x$

-7

13. จงแก้สมการ $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{4} = 5 - \frac{x+2}{4}$

22

14. จงแก้สมการ $(4x - 3)(3x - 1) - (7x + 2)(x + 1) = (5x + 1)(x - 2) - 10$

1

15. จงแก้สมการ $\frac{4}{x-3} + \frac{2}{x} = \frac{6}{x-5}$

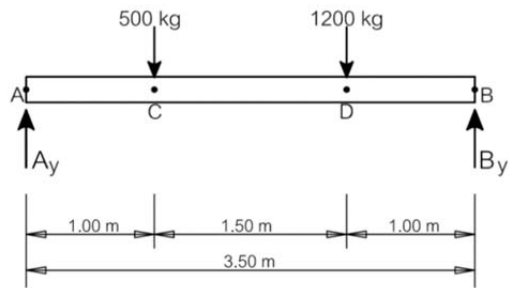
1/6

16. จงแก้สมการ $\frac{3}{x-2} + \frac{5}{x-3} = \frac{8}{x+3}$

7/3

17. จงใช้หลักการของโมเมนต์รอบจุดคำนวณหาแรง A_y , B_y

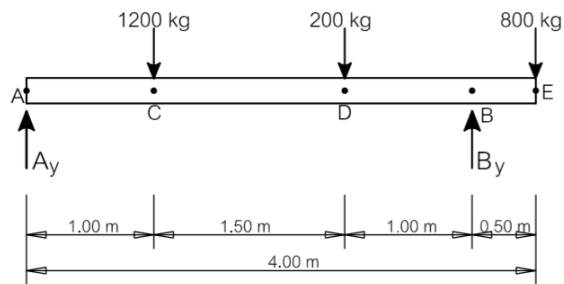
$$A_y = 700 \text{ kg}, \quad B_y = 1000 \text{ kg}$$



รูปที่ 2.5

18. จงใช้หลักการของโมเมนต์รอบจุดคำนวณหาแรง A_y , B_y

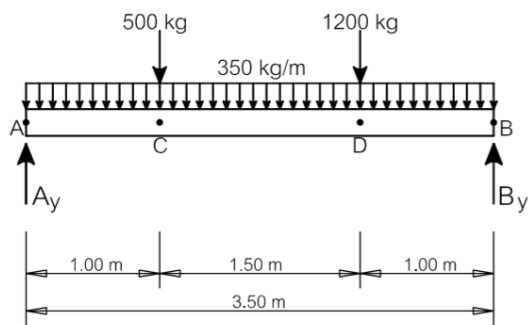
$$A_y = 800 \text{ kg}, \quad B_y = 1400 \text{ kg}$$



รูปที่ 2.6

19. จงใช้หลักการของโมเมนต์รอบจุดคำนวณหาแรง A_y , B_y

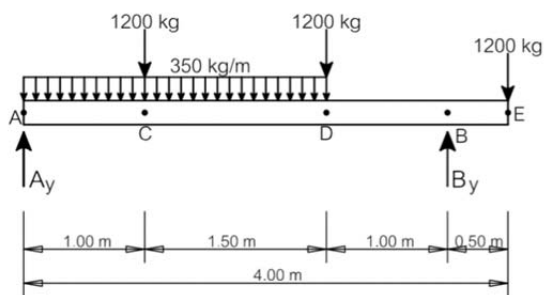
$$A_y = 1312 \text{ kg}, \quad B_y = 1612.5 \text{ kg}$$



รูปที่ 2.7

20. จงใช้หลักการของโมเมนต์รอบจุดคำนวณหาแรง A_y , B_y

$$A_y = 1591.071 \text{ kg}, \quad B_y = 2883.929 \text{ kg}$$



รูปที่ 2.8

แบบทดสอบหลังเรียนบทที่ 2 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย × ทับลงบนตัวอักษร ก ข ค ง ที่ถูกต้องที่สุดเพียงหนึ่งข้อเท่านั้น
(คะแนนรวม 10 คะแนน) ห้ามใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด

1. จากสมการ $-x + 1 = 0$ ข้อใดคือค่าของ x

- | | |
|-------|----------------|
| ก. 0 | ✗ +1 |
| ค. -1 | ง. หาค่าไม่ได้ |

2. จากสมการ $3x + \frac{1}{5} = 0$ ข้อใดคือค่าของ x

- | | |
|-------------------|------------------|
| ก. $\frac{1}{10}$ | ข. $\frac{3}{5}$ |
| ✗ $-\frac{1}{15}$ | ง. -5 |

3. จากสมการ $2x - 15 = 3$ ข้อใดคือค่าของ x

- | | |
|------|------|
| ก. 3 | ข. 5 |
| ค. 7 | ✗ 9 |

4. จากสมการ $7x - 2 = 4x + 25$ ข้อใดคือค่าของ x

- | | |
|------|------|
| ก. 3 | ข. 5 |
| ค. 7 | ✗ 9 |

5. จาก $4(x + 5) - 6(2x + 3) = 3(x + 14) - 2(5 - x) + 9$ ข้อใดคือค่าของ x

- | | |
|---------------------|------------------------|
| ✗ $\frac{21}{-13}$ | ข. $-\frac{21}{(-13)}$ |
| ค. $\frac{11}{-13}$ | ง. $-\frac{11}{(-13)}$ |

6. จาก $\frac{2x+1}{3} - \frac{2x+5}{5} = 2 + \frac{x-1}{6}$ ข้อใดคือค่าของ x

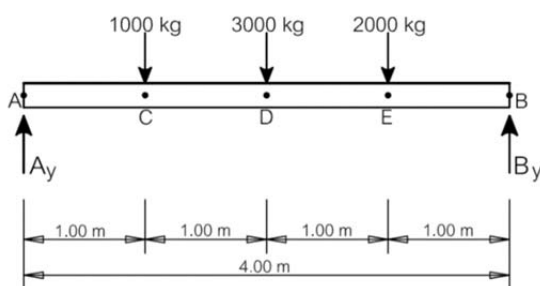
- | | |
|-------|--------|
| ✗ 25 | ข. -25 |
| ค. 30 | ง. -30 |

7. จาก $\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x} = \frac{5}{x-4}$ ข้อใดคือค่าของ x

ก. $\frac{1}{2}$ ✗ $1\frac{1}{2}$

ค. $\frac{2}{3}$ ง. $\frac{3}{4}$

8. จากรูปคานช่วงเดียวอย่างง่าย ข้อใดคือค่าของ A_y และ B_y



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 8

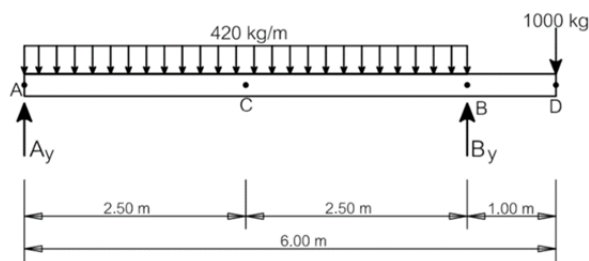
✗ $A_y = 2750 \text{ kg}, B_y = 3250 \text{ kg}$

ข. $A_y = 1354 \text{ kg}, B_y = 4646 \text{ kg}$

ค. $A_y = 2010 \text{ kg}, B_y = 3990 \text{ kg}$

ง. $A_y = 3125 \text{ kg}, B_y = 2875 \text{ kg}$

9. จากจากรูปคานช่วงเดียวปลายยื่นอย่างง่าย ข้อใดคือค่าของ A_y และ B_y



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 9

ก. $A_y = 2050 \text{ kg}, B_y = 1050 \text{ kg}$

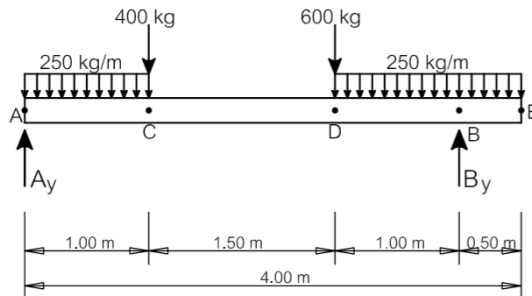
ข. $A_y = 1500 \text{ kg}, B_y = 1600 \text{ kg}$

ค. $A_y = 1050 \text{ kg}, B_y = 2050 \text{ kg}$

✗ $A_y = 850 \text{ kg}, B_y = 2250 \text{ kg}$

10 คณิตศาสตร์เชิงโยธา

10. จากรูปคานช่วงเดียวปลายยื่นอย่างง่าย ข้อใดคือค่าของ A_y และ B_y



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 10

- ก. $A_y = 752.354 \text{ kg}$, $B_y = 872.646 \text{ kg}$
- ~~ข.~~ $A_y = 698.214 \text{ kg}$, $B_y = 926.786 \text{ kg}$
- ค. $A_y = 558.941 \text{ kg}$, $B_y = 1066.059 \text{ kg}$
- ง. $A_y = 490.788 \text{ kg}$, $B_y = 1134.212 \text{ kg}$

แบบวัดผล บทที่ 2 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว (Single Variable Linear Equation)							
ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา รหัสวิชา 20121-1001				วิทยาลัย			
ชื่อ-สกุล..... ระดับ.....				ครู			
ที่	รายการประเมิน	คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน		คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน		คะแนนแบบฝึกหัด	
		คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้		
1	สมการ						
2	สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว						
3	การแก้สมการ						
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
รวมคะแนนด้านทักษะ		10		10		60	
13	ความขยันหมั่นเพียร ความวิริยะอุตสาหะ					10	
14	ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์สุจริต					10	
รวมคะแนนทั้งหมด				100		รวม	

แบบทดสอบก่อนเรียนบทที่ 3 สมการเชิงเส้นสองตัวแปร (Linear Equation with Two Variables)

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย × ทับลงบนตัวอักษร ก ข ค ง ที่ถูกต้องที่สุดเพียงหนึ่งข้อเท่านั้น
(คะแนนรวม 10 คะแนน) อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด

1. ข้อใดคือคำตอบของระบบสมการนี้

$$7x - 4y = 23 \quad \dots\dots\dots [1]$$

$$4x - 3y = 11 \quad \dots\dots\dots[2]$$

~~7.~~ $x = 5, y = 3$ 8. $x = 1, y = 2$

9. $x = -5, y = 1$
 10. $x = 3, y = -4$

2. ข้อใดคือคำตอบของระบบสมการนี้

$x - y = 2$ [1]

$$2x + 3y = 9 \quad \dots\dots\dots [2]$$

п. $x = 12, y = -6$ ы. $x = 4, y = 2$

~~3.~~ $x = 3, y = 1$ 4. $x = -5, y = -4$

3. ข้อใดคือคำตอบของระบบสมการนี้

$$4x + 2y = 10 \quad \dots\dots\dots [1]$$

$$3x - 5y = 1 \quad \dots\dots\dots[2]$$

п. $x = -3, y = 3$ ж. $x = -4.5, y = 9$

ก. $x = 5, y = 2$ ✗ ข. $x = 2, y = 1$

4. ข้อใดคือคำตอบของระบบสมการนี้

$$10x + 3y = 22 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$5x + 7.5y = 9.2 \quad \dots\dots\dots [2]$$

п. $x = -0.18, y = 4.01$ ж. $x = -4.67, y = 2.45$

~~h.~~ $x = 2.29, y = -0.30$ j. $x = 5.03, y = -1.32$

2 คณิตศาสตร์เชิงโยธา

5. ข้อใดคือคำตอบของสมการ $4x^2 + 11x - 15 = 0$

☒ ก. $x = 1.00, x = -3.75$

ข. $x = 1.53, x = -2.64$

ค. $x = 1.76, x = -2.43$

ง. $x = 1.08, x = -3.12$

6. ข้อใดคือคำตอบของสมการ $5x^2 + 14x - 3 = 0$

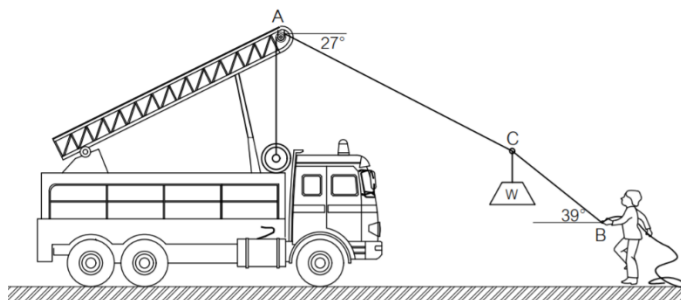
ก. $x = -3.0, x = 2.3$

ข. $x = 0.7, x = -1.6$

ค. $x = -4.0, x = 0.8$

☒ ง. $x = 0.2, x = -3.0$

7. จากรูปข้อใดคือแรงในสายเคเบิล AC และ BC กำหนดให้น้ำหนักของวัตถุ $W = 800 \text{ N}$



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 7

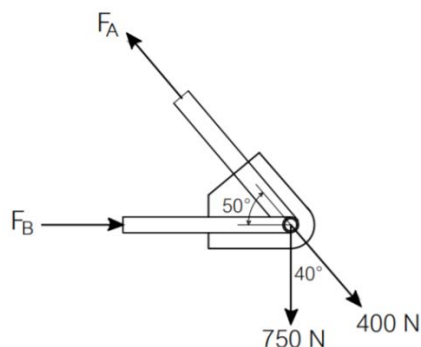
ก. $F_{AC} = 2990.292 \text{ N}$ (แรงดึง), $F_{BC} = 3428.404 \text{ N}$ (แรงดึง)

ข. $F_{AC} = 2990.292 \text{ N}$ (แรงดึง), $F_{BC} = 3428.404 \text{ N}$ (แรงอัด)

☒ ค. $F_{AC} = 2990.292 \text{ N}$ (แรงอัด), $F_{BC} = 3428.404 \text{ N}$ (แรงอัด)

ง. $F_{AC} = 2990.292 \text{ N}$ (แรงอัด), $F_{BC} = 3428.404 \text{ N}$ (แรงดึง)

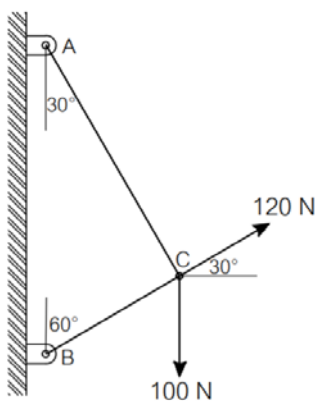
8. จากรูปข้อใดคือแรงดึงในท่อนเหล็ก F_A และแรงอัดในท่อนเหล็ก F_B



รูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 8

- ก. $F_A = 834.622 \text{ N}$ (แรงดึง), $F_B = 341.207 \text{ N}$ (แรงอัด)
 ✗ $F_A = 1379.055 \text{ N}$ (แรงดึง), $F_B = 629.325 \text{ N}$ (แรงอัด)
 ค. $F_A = 2405.265 \text{ N}$ (แรงดึง), $F_B = 1125.254 \text{ N}$ (แรงอัด)
 ง. $F_A = 3871.150 \text{ N}$ (แรงดึง), $F_B = 2138.074 \text{ N}$ (แรงอัด)

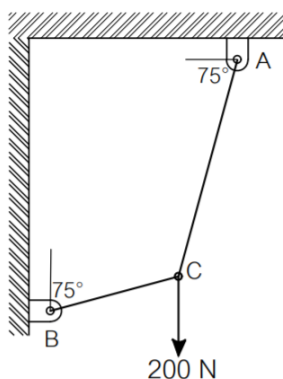
9. จากรูปข้อใดคือแรงดึงในสายเคเบิล AC และ BC



รูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 9

- ✗ $F_{AC} = 86.603 \text{ N}$, $F_{BC} = 70 \text{ N}$ ข. $F_{AC} = 215.731 \text{ N}$, $F_{BC} = 20 \text{ N}$
 ค. $F_{AC} = 332.604 \text{ N}$, $F_{BC} = 30 \text{ N}$ ง. $F_{AC} = 405.804 \text{ N}$, $F_{BC} = 40 \text{ N}$

10. จากรูปข้อใดคือแรงดึงในสายเคเบิล AC และ BC



รูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 10

- ก. $F_{AC} = 60.532 \text{ N}$, $F_{BC} = 164.302 \text{ N}$ ข. $F_{AC} = 98.411 \text{ N}$, $F_{BC} = 120.345 \text{ N}$
 ค. $F_{AC} = 153.821 \text{ N}$, $F_{BC} = 85.362 \text{ N}$ ✗ $F_{AC} = 223.071 \text{ N}$, $F_{BC} = 59.722 \text{ N}$

แบบฝึกหัดบทที่ 3 สมการเชิงเส้นสองตัวแปร

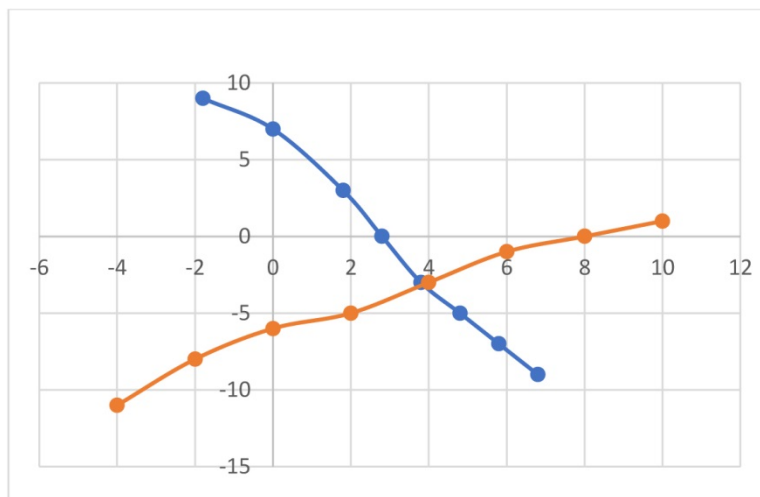
คำสั่ง แบบฝึกหัดจำนวนทั้งหมด 20 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน รวม 60 คะแนน
(ห้ามใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด)

1. จงแก้สมการเชิงเส้นสองตัวแปร สองสมการ โดยใช้กราฟ

$$5x + 2y = 14 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$3x - 4y = 24 \quad \dots\dots\dots[2]$$

$$x = 4, \quad y = -3$$



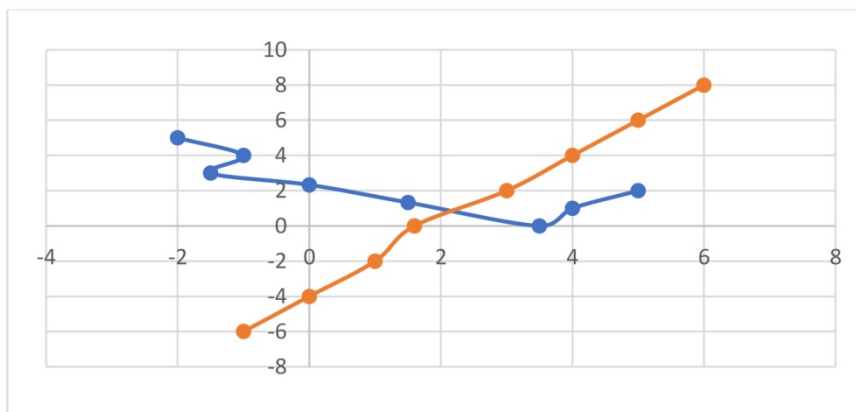
รูปที่ 3.8

2. จงแก้สมการเชิงเส้นสองตัวแปร สองสมการ โดยใช้กราฟ

$$2x + 3y = 7 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$5x - 2y = 8 \quad \dots\dots\dots[2]$$

$$x = 2, \quad y = 1$$



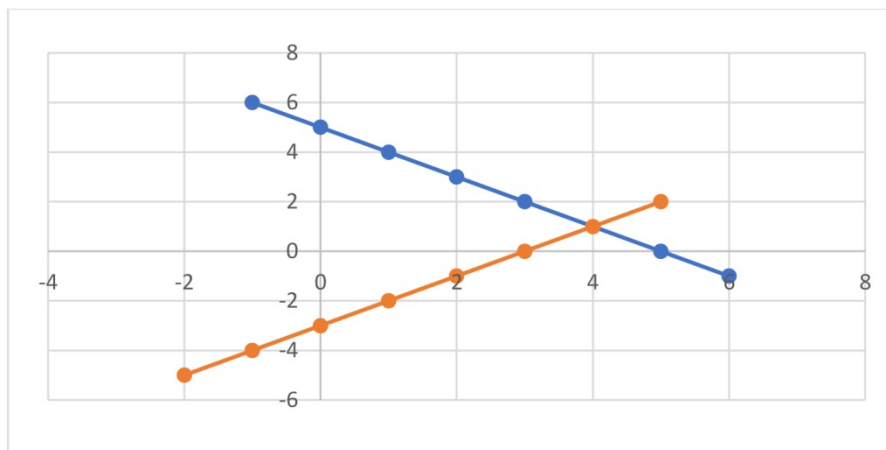
รูปที่ 3.9

3. จงแก้สมการเชิงเส้นสองตัวแปร สองสมการ โดยใช้กราฟ

$x + y = 5$ [1]

$x - y = 3$ [2]

$x = 4, \quad y = 1$



รูปที่ 3.10

6 คณิตศาสตร์ช่วงโยธา

4. จงแก้สมการเชิงเส้นสองตัวแปร สองสมการ โดยใช้การแทนค่า

$$8x - 5y = 10 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$6x - 4y = 11 \quad \dots\dots\dots[2]$$

$$\mathbf{x = -7, \quad y = -14}$$

5. จงแก้สมการเชิงเส้นสองตัวแปร สองสมการ โดยใช้การแทนค่า

$$4x + 2y = 5 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$3x + y = 9 \quad \dots\dots\dots[2]$$

$$\mathbf{x = 6.5, \quad y = -10.5}$$

6. จงแก้สมการเชิงเส้นสองตัวแปร สองสมการ โดยใช้การแทนค่า

$$3x + 2y = 16 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$4x - 3y = 10 \quad \dots\dots\dots[2]$$

$$\mathbf{x = 4, \quad y = 2}$$

7. จงแก้สมการเชิงเส้นสองตัวแปร สองสมการ โดยใช้การแทนค่า

$$3x + 4y = 9 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$2x + 3y = 8 \quad \dots\dots\dots[2]$$

$$\mathbf{x = -5, \quad y = 6}$$

8. จงแก้สมการเชิงเส้นสองตัวแปร สองสมการ โดยใช้การแทนค่า

$$3x + y = 18 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$4x + 2y = 21 \quad \dots\dots\dots[2]$$

$$\mathbf{x = 7.5, \quad y = -4.5}$$

9. จงแก้สมการเชิงเส้นสองตัวแปร สองสมการ โดยการจัดตัวแปร

$$8x - 5y = 10 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$6x - 4y = 11 \quad \dots\dots\dots[2]$$

$$\mathbf{x = -7.5, \quad y = -14}$$

10. จงแก้สมการเชิงเส้นสองตัวแปร สองสมการ โดยการกำจัดตัวแปร

$$4x + 2y = 5 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$3x + y = 9 \quad \dots\dots\dots[2]$$

$$\mathbf{x = 6.5, \quad y = -10.5}$$

11. จงแก้สมการเชิงเส้นสองตัวแปร สองสมการ โดยการกำจัดตัวแปร

$$3x + 2y = 16 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$4x - 3y = 10 \quad \dots\dots\dots[2]$$

$$\mathbf{x = 4, \quad y = 2}$$

12. จงแก้สมการเชิงเส้นสองตัวแปร สองสมการ โดยการกำจัดตัวแปร

$$3x + 4y = 9 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$2x + 3y = 8 \quad \dots\dots\dots[2]$$

$$\mathbf{x = -5, \quad y = 6}$$

13. จงแก้สมการ $x^2 - 5x - 6 = 0$ โดยวิธีแยกตัวประกอบ

$$\mathbf{x = 6, \quad x = -1}$$

14. จงแก้สมการ $16x^2 - 8x + 1 = 0$ โดยวิธีแยกตัวประกอบ

$$\mathbf{x = 0.25}$$

15. จงแก้สมการ $x^2 + 4x - 21 = 0$ โดยทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$\mathbf{x = 3, \quad x = -7}$$

16. จงแก้สมการ $5x^2 - 17x + 6 = 0$ โดยทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$\mathbf{x = 3, \quad x = 0.4}$$

17. จงแก้สมการ $x^2 - 3x - 10 = 0$ โดยใช้สูตร

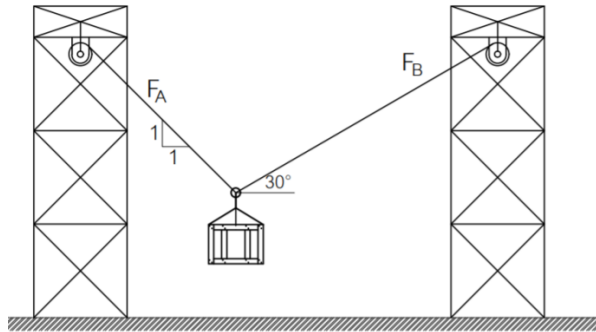
$$\mathbf{x = 5, \quad x = -2}$$

18. จงแก้สมการ $x^2 - 16x + 63 = 0$ โดยใช้สูตร

$$\mathbf{x = 9, \quad x = 7}$$

19. จากรูปที่ 3.11 จงคำนวณหาแรงในสายเคเบิล F_A และ F_B เมื่อวัตถุที่แขวนมีน้ำหนัก 500 N

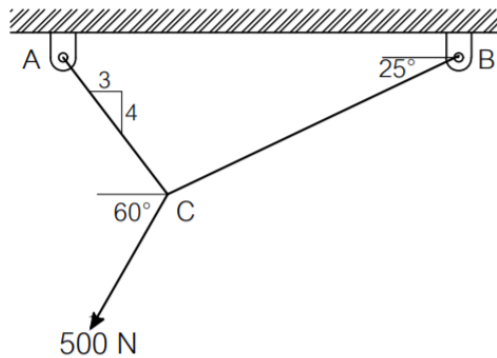
$$F_A = 448.288 \text{ N}, \quad F_B = 366.025 \text{ N}$$



รูปที่ 3.11

20. จากรูปที่ 3.12 จงคำนวณหาแรงในสายเคเบิล T_{AC} และ T_{BC}

$$T_{AC} = 293.055 \text{ N}, \quad T_{BC} = 469.854 \text{ N}$$



รูปที่ 3.12

แบบทดสอบหลังเรียนบทที่ 3 สมการเชิงเส้นสองตัวแปร

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย × ทับลงบนตัวอักษร ก ข ค ง ที่ถูกต้องที่สุดเพียงหนึ่งข้อเท่านั้น
(คะแนนรวม 10 คะแนน) อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด

1. ข้อใดคือคำตอบของระบบสมการนี้

$$7x - 4y = 23 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$4x - 3y = 11 \quad \dots\dots\dots[2]$$

✗ ก. $x = 5, y = 3$

ข. $x = 1, y = 2$

ค. $x = -5, y = 1$

ง. $x = 3, y = -4$

2. ข้อใดคือคำตอบของระบบสมการนี้

$$x - y = 2 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$2x + 3y = 9 \quad \dots\dots\dots[2]$$

ก. $x = 12, y = -6$

ข. $x = 4, y = 2$

✗ ค. $x = 3, y = 1$

ง. $x = -5, y = -4$

3. ข้อใดคือคำตอบของระบบสมการนี้

$$4x + 2y = 10 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$3x - 5y = 1 \quad \dots\dots\dots[2]$$

ก. $x = -3, y = 3$

ข. $x = -4.5, y = 9$

ค. $x = 5, y = 2$

✗ ง. $x = 2, y = 1$

4. ข้อใดคือคำตอบของระบบสมการนี้

$$10x + 3y = 22 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$5x + 7.5y = 9.2 \quad \dots\dots\dots[2]$$

ก. $x = -0.18, y = 4.01$

ข. $x = -4.67, y = 2.45$

✗ ค. $x = 2.29, y = -0.30$

ง. $x = 5.03, y = -1.32$

10 คณิตศาสตร์ช่วงโยธา

5. ข้อใดคือคำตอบของสมการ $4x^2 + 11x - 15 = 0$

☒ x = 1.00, x = -3.75

ข. x = 1.53, x = -2.64

ค. x = 1.76, x = -2.43

ง. x = 1.08, x = -3.12

6. ข้อใดคือคำตอบของสมการ $5x^2 + 14x - 3 = 0$

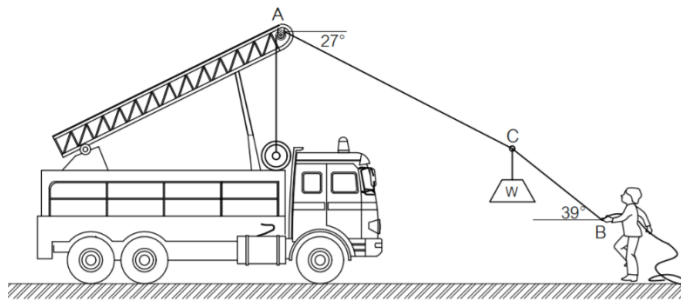
ก. x = -3.0, x = 2.3

ข. x = 0.7, x = -1.6

ค. x = -4.0, x = 0.8

☒ x = 0.2, x = -3.0

7. จากรูปข้อใดคือแรงในสายเคเบิล AC และ BC กำหนดให้น้ำหนักของวัตถุ $W = 800$ N



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 7

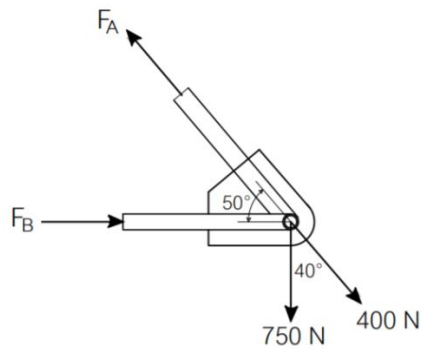
ก. $F_{AC} = 2990.292$ N (แรงดึง), $F_{BC} = 3428.404$ N (แรงดึง)

ข. $F_{AC} = 2990.292$ N (แรงดึง), $F_{BC} = 3428.404$ N (แรงอัด)

☒ $F_{AC} = 2990.292$ N (แรงอัด), $F_{BC} = 3428.404$ N (แรงอัด)

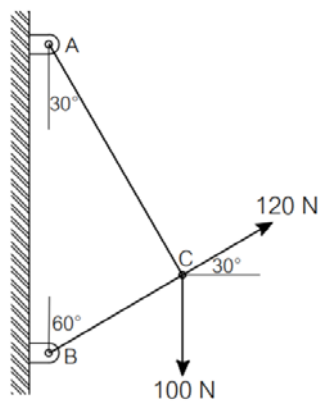
ง. $F_{AC} = 2990.292$ N (แรงอัด), $F_{BC} = 3428.404$ N (แรงดึง)

8. จากกรุปข้อใดคือแรงดึงในท่อนเหล็ก F_A และแรงอัดในท่อนเหล็ก F_B



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 8

- ก. $F_A = 834.622\text{ N}$ (แรงดึง), $F_B = 341.207\text{ N}$ (แรงอัด)
 ✗ ข. $F_A = 1379.055\text{ N}$ (แรงดึง), $F_B = 629.325\text{ N}$ (แรงอัด)
 ค. $F_A = 2405.265\text{ N}$ (แรงดึง), $F_B = 1125.254\text{ N}$ (แรงอัด)
 ง. $F_A = 3871.150\text{ N}$ (แรงดึง), $F_B = 2138.074\text{ N}$ (แรงอัด)
9. จากกรุปข้อใดคือแรงดึงในสายเคเบิล AC และ BC

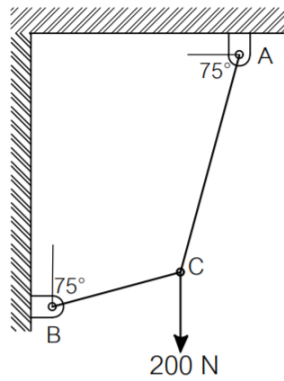


จากรูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 9

- ✗ ก. $F_{AC} = 86.603\text{ N}$, $F_{BC} = 70\text{ N}$
 ข. $F_{AC} = 215.731\text{ N}$, $F_{BC} = 20\text{ N}$
 ค. $F_{AC} = 332.604\text{ N}$, $F_{BC} = 30\text{ N}$
 ง. $F_{AC} = 405.804\text{ N}$, $F_{BC} = 40\text{ N}$

12 คณิตศาสตร์เชิงโยธา

10. จากรูปข้อใดคือแรงดึงในสายเคเบิล AC และ BC



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 10

ก. $F_{AC} = 60.532 \text{ N}$, $F_{BC} = 164.302 \text{ N}$

ข. $F_{AC} = 98.411 \text{ N}$, $F_{BC} = 120.345 \text{ N}$

ค. $F_{AC} = 153.821 \text{ N}$, $F_{BC} = 85.362 \text{ N}$

❌ $F_{AC} = 223.071 \text{ N}$, $F_{BC} = 59.722 \text{ N}$

แบบวัดผล บทที่ 3 สมการเชิงเส้นสองตัวแปรและสมการกำลังสอง (Two Variable Linear Equation and Quadratic Equation)						
ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา รหัสวิชา 20121-1001				วิทยาลัย		
ชื่อ-สกุล..... ระดับ.....				ครู		
ที่	รายการประเมิน	คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน		คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน		คะแนนแบบฝึกหัด
		คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	
1	ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร					
2	การหาคำตอบระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยใช้กราฟ					
3	การหาคำตอบระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยวิธีทางพีชคณิต การแทนค่า					
4	สมการกำลังสอง					
5	การแก้สมการกำลังสองโดยวิธีแยกตัวประกอบ					
6	การแก้สมการกำลังสองโดยทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์					
7	การแก้สมการกำลังสองโดยใช้สูตร					
รวมคะแนนด้านทักษะ		10		10		60
8	ความขยันหมั่นเพียร ความวิริยะอุตสาหะ					10
9	ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์สุจริต					10
รวมคะแนนทั้งหมด				100		รวม

แบบทดสอบก่อนเรียนบทที่ 4 การแก้สมการโดยเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ (Theory of Matrix and Determinant)

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย × ทับลงบนตัวอักษร ก ข ค ง ที่ถูกต้องที่สุดเพียงหนึ่งข้อเท่านั้น
(คะแนนรวม 10 คะแนน) อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด

กำหนดให้ $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 7 & \sqrt{16} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$ และ $C = \begin{pmatrix} \frac{2}{8} & -12 & -\pi \\ 9 & 2\sqrt{4} & \sqrt{100} \end{pmatrix}$

1. ข้อใดคือคำตอบของ $A + 2B - 2A$

ก. $A + 2B - 2A = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$

ข. $A + 2B - 2A = \begin{pmatrix} -3 & 28 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

ค. $A + 2B - 2A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 15 \end{pmatrix}$

✗ $A + 2B - 2A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 23 & 2 \end{pmatrix}$

2. ข้อใดคือคำตอบของ $A \times B$

ก. $A \times B = \begin{pmatrix} -67 & -33 \\ 74 & -58 \end{pmatrix}$

✗ $A \times B = \begin{pmatrix} -67 & -23 \\ 74 & -2 \end{pmatrix}$

ค. $A \times B = \begin{pmatrix} -8 & 22 \\ 58 & -58 \end{pmatrix}$

ง. $A \times B = \begin{pmatrix} -58 & -23 \\ 58 & -2 \end{pmatrix}$

3. ข้อใดคือคำตอบของ $A \times C$

✗ $A \times C = \begin{pmatrix} -44 & -68 & -62.566 \\ 37.75 & -68 & 18.009 \end{pmatrix}$

ข. $A \times C = \begin{pmatrix} -44 & -68 & -62.566 \\ 36.533 & -68 & 18.009 \end{pmatrix}$

ค. $A \times C = \begin{pmatrix} -44 & -68 & -61.566 \\ 37.75 & -68 & 18.009 \end{pmatrix}$

ง. $A \times C = \begin{pmatrix} -44 & -68 & -62.566 \\ 37.75 & -68 & 19.009 \end{pmatrix}$

2 คณิตศาสตร์เชิงโยธา

4. ข้อใดคือดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $|A|$

ก. 23

ข. 24

~~ค. 51~~

ง. 26

5. ข้อใดคืออินเวอร์สของเมทริกซ์ B หรือ B^{-1}

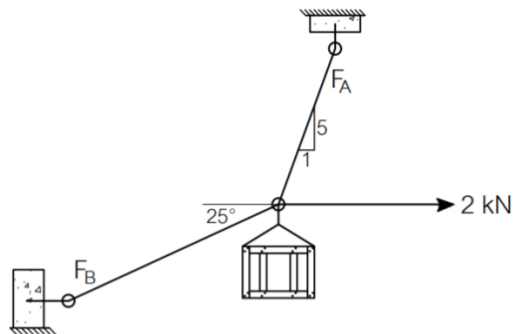
ก. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.083 & 0.417 \\ 0.417 & 0.056 \end{pmatrix}$

~~ข. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.083 & 0.056 \\ 0.417 & 0.056 \end{pmatrix}$~~

ค. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.083 & 0.056 \\ 0.417 & 0.083 \end{pmatrix}$

ง. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.083 & 0.056 \\ 0.056 & 0.056 \end{pmatrix}$

6. ข้อใดคือค่าตอบแรงในเคเบิล F_A และ F_B ถ้ากำหนดให้กล่องหนัก 10 kN (ใช้วิธีเมทริกซ์หรือดีเทอร์มิแนนต์ในการคำนวณ)



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 6

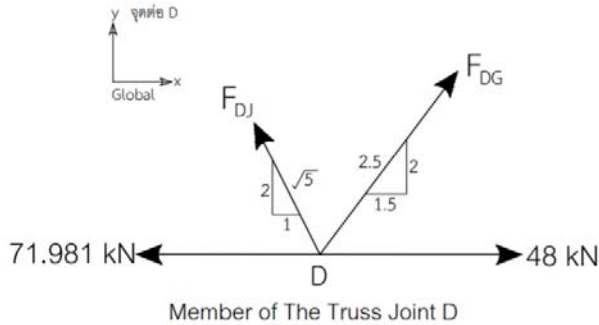
ก. $F_A = 12.296$ kN (แรงอัด), $F_B = 4.867$ kN (แรงอัด)

ข. $F_A = 15.472$ kN (แรงอัด), $F_B = 6.705$ kN (แรงอัด)

~~ค. $F_A = 12.296$ kN (แรงดึง), $F_B = 4.867$ kN (แรงดึง)~~

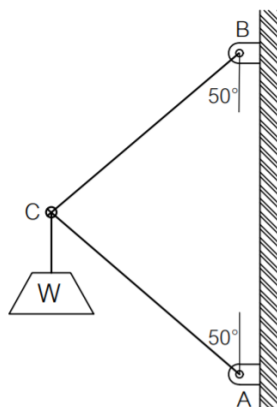
ง. $F_A = 15.472$ kN (แรงดึง), $F_B = 6.705$ kN (แรงดึง)

7. จากรูปตัดจุดต่อ D ข้อใดคือแรงในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน F_{DJ} และ F_{DG} (ใช้วิธีเมทริกซ์หรือดีเทอร์มิแนนต์ในการคำนวณ)



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 7

- ก. $F_{DJ} = 21.449$ kN (แรงอัด), $F_{DG} = 23.981$ kN (แรงดึง)
- ข. $F_{DJ} = 51.251$ kN (แรงดึง), $F_{DG} = 63.401$ kN (แรงดึง)
- ค. $F_{DJ} = 51.251$ kN (แรงดึง), $F_{DG} = 63.401$ kN (แรงอัด)
- ✗** $F_{DJ} = 21.449$ kN (แรงดึง), $F_{DG} = 23.981$ kN (แรงอัด)
8. จากรูปข้อใดคือแรงดึงในท่อนเหล็ก F_{AC} และแรงอัดในท่อนเหล็ก F_{BC} เมื่อกำหนดให้ $W = 13$ kN (ใช้วิธีเมทริกซ์หรือดีเทอร์มิแนนต์ในการคำนวณ)



รูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 8

4 คณิตศาสตร์เชิงโยธา

~~✗~~ $F_{AC} = 10.112 \text{ kN}$ (แรงอัด), $F_{BC} = 10.112 \text{ kN}$ (แรงดึง)

ข. $F_{AC} = 10.112 \text{ kN}$ (แรงดึง), $F_{BC} = 5.633 \text{ kN}$ (แรงอัด)

ค. $F_{AC} = 12.634 \text{ kN}$ (แรงดึง), $F_{BC} = 10.112 \text{ kN}$ (แรงอัด)

ง. $F_{AC} = 8.931 \text{ kN}$ (แรงดึง), $F_{BC} = 13.689 \text{ kN}$ (แรงอัด)

9. จงใช้ดีเทอร์มิแนนต์แก้ปัญหาสมการเชิงเส้น 2 สมการ 2 ตัวแปร

$$21 = u + 3.5a = 21 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$33 = u + 6.1a = 33 \quad \dots\dots\dots[2]$$

ก. $\begin{pmatrix} u \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.80 \\ 3.72 \end{pmatrix}$

ข. $\begin{pmatrix} u \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.72 \\ 5.63 \end{pmatrix}$

~~✗~~ $\begin{pmatrix} u \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.85 \\ 4.62 \end{pmatrix}$

ง. $\begin{pmatrix} u \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.64 \\ 4.80 \end{pmatrix}$

10. จงใช้เมทริกซ์แก้ปัญหาสมการเชิงเส้น 2 สมการ 2 ตัวแปร

$$4x - 3y = 17 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$x + y + 1 = 0 \quad \dots\dots\dots[2]$$

~~✗~~ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

ข. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

ค. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

ง. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

แบบฝึกหัดบทที่ 4 การแก้สมการโดยเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์

แบบฝึกหัดจำนวนทั้งหมด 20 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน รวม 60 คะแนน (อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณได้)

จากเมทริกซ์ต่อไปนี้จงใช้ตอบคำถามข้อที่ 1 ถึงข้อที่ 4

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \text{ และ } C = \begin{pmatrix} -12 & \frac{1}{2} \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

1. จงคำนวณหา $A + B$

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

2. จงคำนวณหา $A - C$

$$A - C = \begin{pmatrix} 17 & -0.5 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}$$

3. จงคำนวณหา $B + 2C - 3A$

$$B + 2C - 3A = \begin{pmatrix} -40 & 8 \\ 16 & 30 \end{pmatrix}$$

4. จงคำนวณหา $2B + \frac{A}{4} + 5C$

$$2B + \frac{A}{4} + 5C = \begin{pmatrix} -60.75 & 16.50 \\ 18.25 & 10 \end{pmatrix}$$

จากเมทริกซ์ต่อไปนี้จงใช้ตอบคำถามข้อที่ 5 ถึงข้อที่ 6

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ -6 & 0 & -1 \\ -8 & 1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -10 & \frac{1}{4} & -5 \\ 11 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ และ } C = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{5} \\ 4 \end{pmatrix}$$

6 คณิตศาสตร์ข้างโยธา

5. จงคำนวณหา $A \times C$

$$A \times C = \begin{pmatrix} -5.4 \\ 14 \\ 52.2 \end{pmatrix}$$

6. จงคำนวณหา $C \times B$

หาค่าไม่ได้

จากเมทริกซ์ต่อไปนี้จงใช้ตอบคำถามข้อที่ 7 ถึงข้อที่ 8

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 0 & 3\sqrt{9} & 5 \\ -6 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 1 & 22 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ และ } C = \begin{pmatrix} \sqrt{4} & 5^2 & 3 \\ -18 & 7 & -6 \\ -5 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

7. จงคำนวณหา $A \times C$

$$A \times C = \begin{pmatrix} 40 & 54 & -21 \\ -187 & 63 & -114 \\ -16.5 & -148.25 & -19.5 \end{pmatrix}$$

8. จงคำนวณหา $C \times B$

$$C \times B = \begin{pmatrix} 36 & 551 \\ -113 & 250 \\ -23 & -25 \end{pmatrix}$$

9. จงคำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$

$$|A| = 16$$

10. จงคำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $A = \begin{pmatrix} -11 & -5 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$

$$|A| = 51$$

11. จงคำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$

$$|A| = -1$$

12. กำหนดให้ $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ จงคำนวณเมทริกซ์ A^{-1} และตรวจสอบด้วยว่าเป็นอินเวอร์สของเมทริกซ์ A จริงโดยใช้วิธีเมทริกซ์หนึ่งหน่วย (Unit Matrix)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.412 & 0.059 \\ 0.235 & 0.176 \end{pmatrix} \text{ และ } A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. กำหนดให้ $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ จงคำนวณเมทริกซ์ A^{-1} และตรวจสอบด้วยว่าเป็นอินเวอร์สของเมทริกซ์ A จริงโดยใช้วิธีเมทริกซ์หนึ่งหน่วย (Unit Matrix)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7.714 & 8.571 \\ -4.286 & -6.426 \end{pmatrix} \text{ และ } A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14. กำหนดให้ $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ จงคำนวณเมทริกซ์ A^{-1} และตรวจสอบด้วยว่าเป็นอินเวอร์สของเมทริกซ์ A จริงโดยใช้วิธีสมบัติเกี่ยวกับการคูณและการเท่ากันของเมทริกซ์

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.412 & 0.059 \\ 0.235 & 0.176 \end{pmatrix}$$

$$\text{และ } A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15. กำหนดให้ $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ จงคำนวณเมทริกซ์ A^{-1} และตรวจสอบด้วยว่าเป็นอินเวอร์ส

ของเมทริกซ์ A จริงโดยใช้วิธีสมบัติเกี่ยวกับการคูณและการเท่ากันของเมทริกซ์

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.714 & 8.571 \\ -4.286 & -6.426 \end{pmatrix}$$

$$\text{และ } A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16. จงใช้เมทริกซ์แก้ปัญหасмการเชิงเส้น 2 สมการ 2 ตัวแปรพร้อมกัน

$$5x + 2y + 19 = 0 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$3x + 4y + 17 = 0 \quad \dots\dots\dots[2]$$

$$x = -3, \quad y = -2$$

17. จงใช้ดีเทอร์มิแนนต์แก้ปัญหасмการเชิงเส้น 2 สมการ 2 ตัวแปร

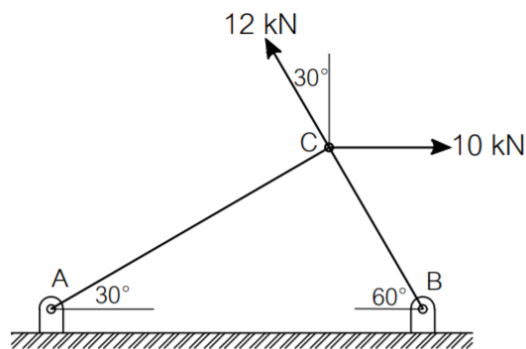
$$5x + 2y + 19 = 0 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$3x + 4y + 17 = 0 \quad \dots\dots\dots[2]$$

$$x = -3, \quad y = -2$$

18. จากรูปจงคำนวณหาแรงในท่อนเหล็ก F_{AC} และ F_{BC} โดยใช้เมทริกซ์ในการแก้ปัญหา

$$F_{AC} = 8.66 \text{ kN (แรงดึง)}, \quad F_{BC} = 7 \text{ kN (แรงดึง)}$$



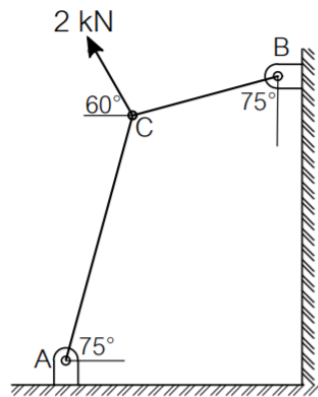
รูปที่ 4.3

19. จากรูปที่ 4.3 จงใช้ดีเทอร์มิแนนต์แก้ปัญหาเพื่อคำนวณหาแรงในท่อนเหล็ก F_{AC} และ F_{BC}

$$F_{AC} = 8.66 \text{ kN (แรงดึง)}, \quad F_{BC} = 7 \text{ kN (แรงดึง)}$$

20. จากรูปจงคำนวณหาแรงในสายเคเบิล F_{AC} และ F_{BC} โดยใช้เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์แก้ปัญหา

$$F_{AC} = 2.231 \text{ kN (แรงดึง)}, \quad F_{BC} = 1.633 \text{ (แรงดึง)}$$



รูปที่ 4.4

แบบทดสอบหลังเรียนบทที่ 4

การแก้สมการโดยเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย × ทับลงบนตัวอักษร ก ข ค ง ที่ถูกต้องที่สุดเพียงหนึ่งข้อเท่านั้น
(คะแนนรวม 10 คะแนน) อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด

กำหนดให้ $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 7 & \sqrt{16} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$ และ $C = \begin{pmatrix} \frac{2}{8} & -12 & -\pi \\ 9 & 2\sqrt{4} & \sqrt{100} \end{pmatrix}$

1. ข้อใดคือคำตอบของ $A + 2B - 2A$

ก. $A + 2B - 2A = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$

ข. $A + 2B - 2A = \begin{pmatrix} -3 & 28 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

ค. $A + 2B - 2A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 15 \end{pmatrix}$

~~ง.~~ $A + 2B - 2A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 23 & 2 \end{pmatrix}$

2. ข้อใดคือคำตอบของ $A \times B$

ก. $A \times B = \begin{pmatrix} -67 & -33 \\ 74 & -58 \end{pmatrix}$

~~ข.~~ $A \times B = \begin{pmatrix} -67 & -23 \\ 74 & -2 \end{pmatrix}$

ค. $A \times B = \begin{pmatrix} -8 & 22 \\ 58 & -58 \end{pmatrix}$

ง. $A \times B = \begin{pmatrix} -58 & -23 \\ 58 & -2 \end{pmatrix}$

3. ข้อใดคือคำตอบของ $A \times C$

~~ก.~~ $A \times C = \begin{pmatrix} -44 & -68 & -62.566 \\ 37.75 & -68 & 18.009 \end{pmatrix}$

ข. $A \times C = \begin{pmatrix} -44 & -68 & -62.566 \\ 36.533 & -68 & 18.009 \end{pmatrix}$

ค. $A \times C = \begin{pmatrix} -44 & -68 & -61.566 \\ 37.75 & -68 & 18.009 \end{pmatrix}$

ง. $A \times C = \begin{pmatrix} -44 & -68 & -62.566 \\ 37.75 & -68 & 19.009 \end{pmatrix}$

4. ข้อใดคือดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $|A|$

ก. 23

ข. 24

~~ค. 51~~

ง. 26

5. ข้อใดคืออินเวอร์สของเมทริกซ์ B หรือ B^{-1}

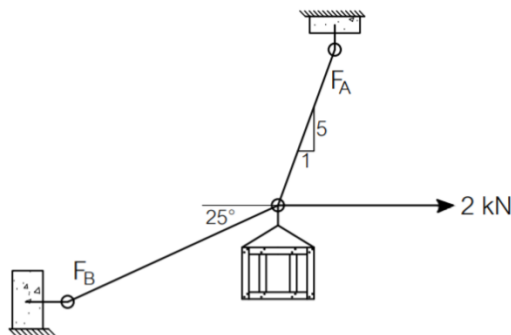
ก. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.083 & 0.417 \\ 0.417 & 0.056 \end{pmatrix}$

~~ข. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.083 & 0.056 \\ -0.417 & 0.056 \end{pmatrix}$~~

ค. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.083 & 0.056 \\ 0.417 & 0.083 \end{pmatrix}$

ง. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.083 & 0.056 \\ 0.056 & 0.056 \end{pmatrix}$

6. ข้อใดคือค่าตอบแรงในเคเบิล F_A และ F_B ถ้ากำหนดให้กล่องหนัก 10 kN (ใช้วิธีเมทริกซ์หรือดีเทอร์มิแนนต์ในการคำนวณ)



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 6

ก. $F_A = 12.296$ kN (แรงอัด), $F_B = 4.867$ kN (แรงอัด)

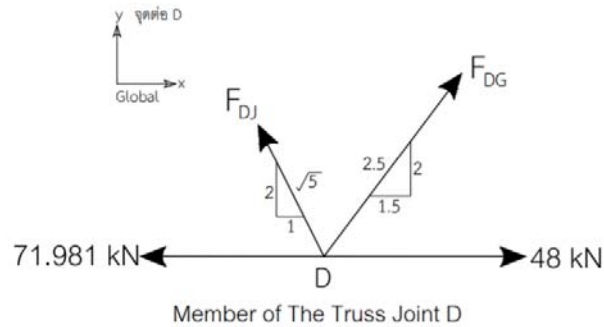
ข. $F_A = 15.472$ kN (แรงอัด), $F_B = 6.705$ kN (แรงอัด)

~~ค. $F_A = 12.296$ kN (แรงดึง), $F_B = 4.867$ kN (แรงดึง)~~

ง. $F_A = 15.472$ kN (แรงดึง), $F_B = 6.705$ kN (แรงดึง)

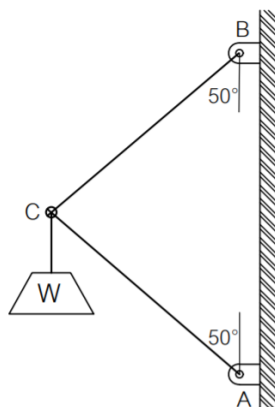
12 คณิตศาสตร์ช่างโยธา

7. จากรูปตัดจุดต่อ D ข้อใดคือแรงในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน F_{DJ} และ F_{DG} (ใช้วิธีเมทริกซ์หรือดีเทอร์มิแนนต์ในการคำนวณ)



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 7

- ก. $F_{DJ} = 21.449$ kN (แรงอัด), $F_{DG} = 23.981$ kN (แรงดึง)
- ข. $F_{DJ} = 51.251$ kN (แรงดึง), $F_{DG} = 63.401$ kN (แรงดึง)
- ค. $F_{DJ} = 51.251$ kN (แรงดึง), $F_{DG} = 63.401$ kN (แรงอัด)
- ~~ง. $F_{DJ} = 21.449$ kN (แรงอัด), $F_{DG} = 23.981$ kN (แรงดึง)~~
8. จากรูปข้อใดคือแรงดึงในท่อนเหล็ก F_{AC} และแรงอัดในท่อนเหล็ก F_{BC} เมื่อกำหนดให้ $W = 13$ kN (ใช้วิธีเมทริกซ์หรือดีเทอร์มิแนนต์ในการคำนวณ)



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อที่ 8

~~✗~~ $F_{AC} = 10.112 \text{ kN}$ (แรงอัด), $F_{BC} = 10.112 \text{ kN}$ (แรงดึง)

ข. $F_{AC} = 10.112 \text{ kN}$ (แรงดึง), $F_{BC} = 5.633 \text{ kN}$ (แรงอัด)

ค. $F_{AC} = 12.634 \text{ kN}$ (แรงดึง), $F_{BC} = 10.112 \text{ kN}$ (แรงอัด)

ง. $F_{AC} = 8.931 \text{ kN}$ (แรงดึง), $F_{BC} = 13.689 \text{ kN}$ (แรงอัด)

9. จงใช้ดีเทอร์มิแนนต์แก้ปัญหасмการเชิงเส้น 2 สมการ 2 ตัวแปร

$$21 = u + 3.5a = 21 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$33 = u + 6.1a = 33 \quad \dots\dots\dots[2]$$

ก. $\begin{pmatrix} u \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.80 \\ 3.72 \end{pmatrix}$

ข. $\begin{pmatrix} u \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.72 \\ 5.63 \end{pmatrix}$

~~✗~~ $\begin{pmatrix} u \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.85 \\ 4.62 \end{pmatrix}$

ง. $\begin{pmatrix} u \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.64 \\ 4.80 \end{pmatrix}$

10. จงใช้เมทริกซ์แก้ปัญหасмการเชิงเส้น 2 สมการ 2 ตัวแปร

$$4x - 3y = 17 \quad \dots\dots\dots[1]$$

$$x + y + 1 = 0 \quad \dots\dots\dots[2]$$

~~✗~~ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

ข. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

ค. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

ง. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

แบบวัดผล บทที่ 4 การแก้สมการโดยเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ (Theory of Matrix and Determinant)							
ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา รหัสวิชา 20121-1001				วิทยาลัย			
ชื่อ-สกุล..... ระดับ.....				ครู			
ที่	รายการประเมิน	คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน		คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน		คะแนนแบบฝึกหัด	
		คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้		
1	เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์						
2	การบวก ลบและการคูณสเกลาร์กับเมทริกซ์						
3	การคูณกันระหว่างเมทริกซ์กับเมทริกซ์						
4	ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ 2×2						
5	อินเวอร์สของเมทริกซ์ 2×2						
6	การแก้ปัญหของสมการเชิงเส้นโดยเมทริกซ์						
7	การแก้ปัญหของสมการเชิงเส้นโดยดีเทอร์มิแนนต์						
8							
9							
10							
11							
12							
รวมคะแนนด้านทักษะ		10		10		60	
13	ความขยันหมั่นเพียร ความวิริยะอุตสาหะ					10	
14	ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์สุจริต					10	
รวมคะแนนทั้งหมด				100		รวม	

แบบทดสอบก่อนเรียนบทที่ 5 พื้นฐานเลขยกกำลัง รากและกรณฑ์ (Power Root and Square Root)

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย × ทับลงบนตัวอักษร ก ข ค ง ที่ถูกต้องที่สุดเพียงหนึ่งข้อเท่านั้น
(คะแนนรวม 10 คะแนน) ห้ามใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด

1. ข้อใดคือค่าของ $(-7)^{\frac{1}{4}}$

ก. 2401	ข. 1.626576562
ค. 3	× ไม่สามารถนิยามหาค่าได้
2. ข้อใดคือค่าของ $(-5)^3$

× -125	ข. 243
ค. 125	ง. -243
3. จาก 81×27 ข้อใดคือรูปเลขยกกำลังของค่าดังกล่าว

ก. 2^7	× 3^7
ค. 2^9	ง. 3^9
4. ข้อใดคือค่าของ $90^{\frac{1}{5}}$

ก. 1.46	× 2.46
ค. 3.46	ง. 4.46
5. ข้อใดคือค่าของ $135^{\frac{1}{3}}$

ก. 2.13	ข. 3.13
ค. 4.13	× 5.13
6. ข้อใดคือค่าของ $\left(\sqrt{9} + \frac{\sqrt{81}}{2}\right) \times \sqrt{4}$

ก. 7.5	× 15
ค. 30	ง. 45

2 คณิตศาสตร์เชิงโยธา

7. จำนวน $0.00812468 \times 10^{-4}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 0.0000812468

ข. 0.00000812468

~~ค.~~ 0.000000812468

ง. 0.0000000812468

8. เทคอนกรีตเป็นพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสหนา 10 cm ใช้คอนกรีต 1.6 m^3 จงคำนวณหาระยะด้านของพื้นที่นี้

ก. 5.00 m

~~ข.~~ 4.00 m

ค. 3.00 m

ง. 2.00 m

9. ท่อนไม้หน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส ยาว 2.50 m รับแรงดึง $F = 17 \times 10^3 \text{ N}$ หน่วยแรงดึงของไม้ที่ยอมให้ $f_t = 1.177 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ จงคำนวณหาหน้าตัดไม้ท่อนดังกล่าว

ก. $(6.35 \times 6.35) \text{ cm}^2$

ข. $(5.08 \times 5.08) \text{ cm}^2$

~~ค.~~ $(3.80 \times 3.80) \text{ cm}^2$

ง. $(2.54 \times 2.54) \text{ cm}^2$

10. ต้องการสร้างถังคอนกรีตใต้ดินทรงลูกบาศก์มีความหนาของถังในทุกด้านที่ 30 cm เพื่อใช้เก็บน้ำ 8.00 m^3 โดยประมาณ ข้อใดคือความยาวด้านภายนอกของถัง

~~ก.~~ 4.60 m

ข. 3.60 m

ค. 2.60 m

ง. 1.60 m

แบบฝึกหัดบทที่ 5 พื้นฐานเลขยกกำลัง รากและกรณฑ์

แบบฝึกหัดจำนวนทั้งหมด 20 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน รวม 60 คะแนน (ห้ามใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด)

1. จงหาค่า 7^3

343

2. จงหาค่า $(2^2)^5$

1024

3. จงหาค่า $5^4 \times 5^2$

15625

4. จงหาค่า $2^4 \times 4^3$

2^{10}

5. จงหาค่าของ $6^4 \div 6^6$

$\frac{1}{36}$

6. จงทำจำนวน 243×9 ให้อยู่ในรูปของเลขยกกำลัง

3^7

7. จงทำจำนวน 2401×343 ให้อยู่ในรูปของเลขยกกำลัง

7^7

8. จงหาค่า $16^{\frac{1}{4}}$

2 และ (-2)

9. จงหาค่าของ $34^{\frac{1}{3}}$

3.24

4 คณิตศาสตร์ขำโยธา

10. จงหาค่าของ $\sqrt{(-8)}$

หาค่าไม่ได้

11. จงหาค่าของ $(\sqrt{100} \div \sqrt{25}) \times (\sqrt{64} + \sqrt{16})$

24

12. จงหาค่าของ $(5\sqrt{49} \times 2\sqrt{4}) \div \left(\frac{2}{3}\sqrt{36} - \sqrt{121}\right) + \sqrt{9}$

-17

13. จงหาค่าของ $4^{\frac{1}{9}}$

1.53

14. จงคำนวณหาค่า $(1.0520 \times 10^3) + (3.0045 \times 10^4)$

31097

15. จงคำนวณหาค่า $(805.528 \times 10^{-2}) - (0.350 \times 10^{-3})$

8.05493

16. จงคำนวณหาค่า $(2.3 \times 10^7) + (3.7 \times 10^7)$

60,000,000

17. แท่งเหล็กกลมตันรับแรงอัด $F = 1590 \text{ kN}$ หน่วยแรงที่เหล็กรับได้ $\sigma = 90100 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ ถ้าสูตรหา

พื้นที่หน้าตัดรวมหาได้จาก $A = \frac{F}{\sigma}$ จงคำนวณหาหน้าตัดแท่งเหล็กกลมตันดังกล่าว

15 cm

18. เทฐานคอนกรีตรองรับเครื่องจักรหนัก เป็นพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสหนา 30 cm ใช้คอนกรีต 1.2 m^3 จงคำนวณหาระยะด้านของพื้นที่ฐานนี้

2 m

19. ต้องการสร้างถังคอนกรีตวางบนดินทรงลูกบาศก์มีความหนาของถังในทุกด้านที่ 25 cm เพื่อใช้เก็บน้ำ 3.4 m^3 โดยประมาณ จงคำนวณหาความยาวด้านภายนอกของถัง

2.00 m

20. ท่อนไม้หน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส ยาว 2.00 m รับแรงดึง $F = 30 \text{ kN}$ หน่วยแรงดึงของไม้ที่ยอมให้ $f_t = 1.177 \times 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ จงคำนวณหาหน้าตัดไม้ดังกล่าว

$5 \times 5 \text{ cm}$

แบบทดสอบหลังเรียนบทที่ 5 พื้นฐานเลขยกกำลัง รากและกรณฑ์

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย × ทับลงบนตัวอักษร ก ข ค ง ที่ถูกต้องที่สุดเพียงหนึ่งข้อเท่านั้น
(คะแนนรวม 10 คะแนน) ห้ามใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด

1. ข้อใดคือค่าของ $(-7)^{\frac{1}{4}}$

ก. 2401

ข. 1.626576562

ค. 3

✗ ไม่สามารถนิยามหาค่าได้

2. ข้อใดคือค่าของ $(-5)^3$

✗ -125

ข. 243

ค. 125

ง. -243

3. จาก 81×27 ข้อใดคือรูปเลขยกกำลังของค่าดังกล่าว

ก. 2^7

✗ 3^7

ค. 2^9

ง. 3^9

4. ข้อใดคือค่าของ $90^{\frac{1}{5}}$

ก. 1.46

✗ 2.46

ค. 3.46

ง. 4.46

5. ข้อใดคือค่าของ $135^{\frac{1}{3}}$

ก. 2.13

ข. 3.13

ค. 4.13

✗ 5.13

6. ข้อใดคือค่าของ $\left(\sqrt{9} + \frac{\sqrt{81}}{2}\right) \times \sqrt{4}$

ก. 7.5

✗ 15

ค. 30

ง. 45

แบบวัดผล							
บทที่ 5 พื้นฐานเลขยกกำลัง รากและกรณฑ์							
(Power Root and Square Root)							
ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา รหัสวิชา 20121-1001					วิทยาลัย		
ชื่อ-สกุล..... ระดับ.....					ครู		
ที่	รายการประเมิน	คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน		คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน		คะแนนแบบฝึกหัด	
		คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้		
1	พื้นฐานเลขยกกำลัง						
2	เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเศษส่วน						
3	รากที่ 2 ของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปของกรณฑ์						
4	การคูณและการหารจำนวนเต็มโดยเลขยกกำลังฐาน 10						
5							
6							
รวมคะแนนด้านทักษะ		10		10		60	
7	ความขยันหมั่นเพียร ความวิริยะอุตสาหะ					10	
8	ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์สุจริต					10	
รวมคะแนนทั้งหมด				100		รวม	

แบบทดสอบก่อนเรียนบทที่ 6 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Exponential Function)

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย × ทับลงบนตัวอักษร ก ข ค ง ที่ถูกต้องที่สุดเพียงหนึ่งข้อเท่านั้น
(คะแนนรวม 10 คะแนน) ห้ามใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด

1. จาก $5^x = 125$ ข้อใดคือค่าตัวแปร x

ก. 3	ข. 4
~~ค. 5~~	ง. 6
2. จาก $(6x^3)^2 \div 2x^2$ ข้อใดคือรูปอย่างง่าย

~~ก. $18x^4$~~	ข. $9x^4$
ค. $3x^4$	ง. x^4
3. จาก $W = (3x)^3 y^{-2} z^{\frac{1}{3}} \times 81^{\frac{1}{4}} x^{-3} y^3 z^{-2}$ ข้อใดคือค่าของ W

ก. $\frac{9xy}{(\sqrt[3]{z})^{-3}}$	~~ค. $\frac{81y}{(\sqrt[3]{z})^{-5}}$~~
ค. $\frac{9y}{z^{\frac{5}{3}}}$	ง. $\frac{64x^0 y^1}{(\sqrt[3]{z})^{-5}}$
4. จากสมการ $4^{x+3} = 8^{3-x}$ ข้อใดคือค่าของตัวแปร x

ก. $x = 0$	ข. $x = \frac{1}{5}$
ค. $x = \frac{2}{5}$	~~ค. $x = \frac{3}{5}$~~
5. จากสมการ $9^{2x-1} = \frac{1}{27}$ ข้อใดคือค่าของตัวแปร x

~~ค. $x = -\frac{1}{4}$~~	ข. $x = \frac{1}{4}$
ค. $x = -\frac{1}{2}$	ง. $x = \frac{1}{2}$
6. จากสมการ $2^{2x} - 2^{x+1} + 1 = 0$ ข้อใดคือค่าของตัวแปร

ก. $x = -1, 1$	ข. $x = 2, -2$
~~ค. $x = 0$~~	ง. $x = 3$

2 คณิตศาสตร์ขำโยธา

7. ข้อใดมีค่าเท่ากับจำนวน $(\sqrt[3]{8} + 3\sqrt{9}) - (\sqrt[4]{81} + 3\sqrt{4})$

ก. 0 ~~✗~~ 2

ค. 4 ง. 6

8. จากฟังก์ชัน $y = 3^{-2x}$ ข้อใดถูกต้อง

~~✗~~ ก. เป็นฟังก์ชันลด ที่ตำแหน่งแกน $x = 1$ ตำแหน่งแกน y จะเท่ากับ 0.111

ข. เป็นฟังก์ชันลด ที่ตำแหน่งแกน $x = 1$ ตำแหน่งแกน y จะเท่ากับ 0

ค. เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ที่ตำแหน่งแกน $x = -2$ ตำแหน่งแกน y จะเท่ากับ 9.033

ง. เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ที่ตำแหน่งแกน $x = 2$ ตำแหน่งแกน y จะเท่ากับ 81

9. จากสมการ $\sqrt{2x+1} - \sqrt{4x-7} + \sqrt{x-4} = 0$ ข้อใดคือค่าของตัวแปร

ก. $x = 1, 0$ ข. $x = -1, 3$

ค. $x = 2, -\frac{4}{3}$ ~~✗~~ $x = 4, -\frac{8}{7}$

10. ท่อเหล็กกลมกลวงมีพื้นที่หน้าตัด $A_g = 57.491 \text{ cm}^2$ วัดเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกได้

$d_{\text{out}} = 76.2 \text{ mm}$ ข้อใดคือความหนาของท่อดังกล่าว

ก. $t = 3.50 \text{ mm}$ ข. $t = 3.00 \text{ mm}$

~~✗~~ ค. $t = 2.50 \text{ mm}$ ง. $t = 2.00 \text{ mm}$

แบบฝึกหัดบทที่ 6 พังก์ชันเลขชี้กำลัง

แบบฝึกหัดจำนวนทั้งหมด 20 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน รวม 60 คะแนน (ห้ามใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด)

1. จงทำจำนวน $(x^3x^{-5})^2(x^{-3}x^{-4})$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\frac{1}{x^{11}}$$

2. จงทำจำนวน $5x^2 + 4x^3 - 2y^3 + 5y$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\frac{3x^6}{y^4}$$

3. จงทำจำนวน $\frac{(5x^{-4})(2x^3)}{10x^{-3}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$x^2$$

4. จงทำจำนวน $\left[\frac{(9x^{-12})(3x^5)(4x^2)}{12x^{-5}} \right]^2$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\frac{54}{x^8}$$

5. จากสมการ $4^{x+3} = 64$ จงหาค่าตัวแปร x

$$x = 1$$

6. จากสมการ $6^{4x-18} = \left(\frac{1}{64}\right)^x$ จงหาค่าตัวแปร x

$$x = 3$$

7. จากสมการ $\frac{1}{81} = 9^{2x-4}$ จงหาค่าตัวแปร x

$$x = 1$$

4 คณิตศาสตร์ช่วงโยธา

8. จากสมการ $2^{2x} - 3(2^x) + 2 = 0$ จงหาค่าตัวแปร x

$$X = 1, 0$$

9. จากสมการ $3^{2x} - 4(3^x) + 4 = 0$ จงหาค่าตัวแปร x

$$X = 2, 3$$

10. จากสมการ $7^{2x} - 50(7^x) + 49 = 0$ จงหาค่าตัวแปร x

$$X = 0, 2$$

11. จงคำนวณหาค่าของ $\sqrt{25} + \frac{\sqrt{100}}{2} - \frac{1}{\sqrt{4}}$

$$9.5$$

12. จงคำนวณหาค่าของ $\sqrt[5]{(-32)} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{(-27)}$

$$2(\sqrt[3]{3}) - 5$$

13. จาก $F = \sqrt[3]{a^6b^3} \div \sqrt{\frac{1}{9}a^4b^6} \times (4\sqrt{a^6b^2})^{-\frac{1}{2}}$ จงคำนวณหาค่า F

$$\frac{3}{2ab^2\sqrt{ab}}$$

14. จงคำนวณหาค่าของ $[5\sqrt{9} \times 3(\sqrt[3]{216})] \div [5(\sqrt[3]{122}) - 8(\sqrt[5]{32})]$

$$30$$

15. จากสมการ $\sqrt{2(x^2) - 18} = x$ จงหาค่าตัวแปร x

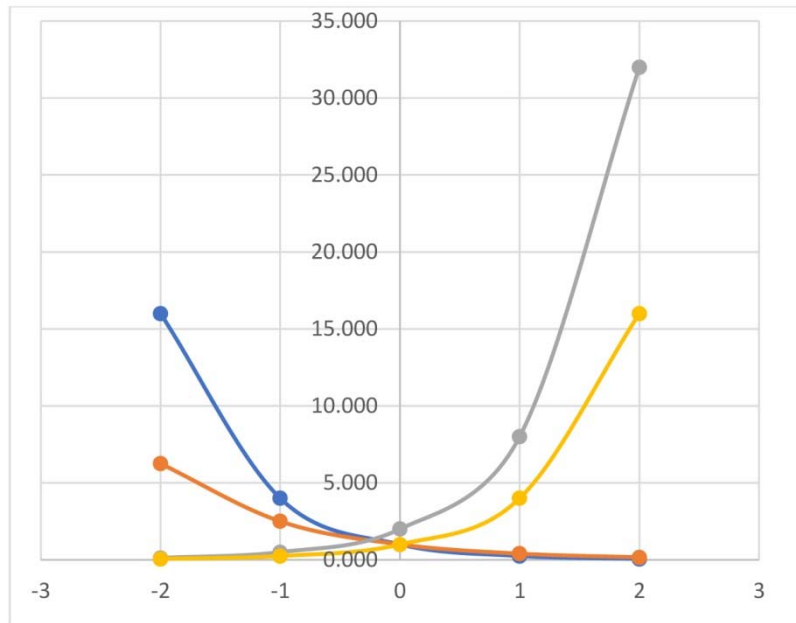
$$3\sqrt{2}$$

16. จากสมการ $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-2} = 3$ จงหาค่าตัวแปร x

$$\frac{9}{4}$$

17. จงเขียนกราฟจากฟังก์ชัน ดังต่อไปนี้ พร้อมทั้งพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด

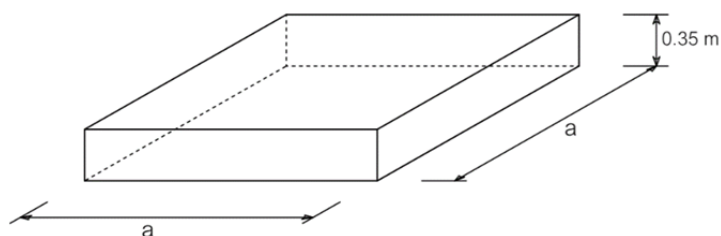
- ก. $y = 4^{-x}$ **ฟังก์ชันลด** ข. $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ **ฟังก์ชันลด**
 ค. $y = 2^{2x+1}$ **ฟังก์ชันเพิ่ม** ง. $y = 4^x$ **ฟังก์ชันเพิ่ม**



รูปที่ 6.4

18. ในการก่อสร้างฐานรากแปรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีความหนา 0.35 m ใช้ปริมาตรของคอนกรีต 1.40 m^3 จงคำนวณหาความยาวต่อต้านของพื้นที่ฐานราก

2.0 m × 2.0



รูปที่ 6.5

6 คณิตศาสตร์ช่างโยธา

19. ในการก่อสร้างเสาหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีความสูง 3.00 m จำนวน 12 ต้น ใช้ปริมาตรของคอนกรีต 3.24 m^3 จงคำนวณหาความยาวต่อต้านของพื้นที่หน้าตัดเสาดังกล่าว

0.3 m

20. ท่อเหล็กกลมกลวงมีพื้นที่หน้าตัด $A_g = 11 \text{ cm}^2$ วัดเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกได้ $d_{\text{out}} = 144.3 \text{ mm}$ จงคำนวณหาความหนาของท่อดังกล่าว

3.15 mm

แบบทดสอบหลังเรียนบทที่ 6 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย × ทับลงบนตัวอักษร ก ข ค ง ที่ถูกต้องที่สุดเพียงหนึ่งข้อเท่านั้น
(คะแนนรวม 10 คะแนน) ห้ามใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด

1. จาก $5^x = 125$ ข้อใดคือค่าตัวแปร

ก. 3

ข. 4

~~ค. 5~~

ง. 6

2. จาก $[6x^3]^2 \div 2x^2$ ข้อใดคือรูปอย่างง่าย

~~ก. $18x^4$~~

ข. $9x^4$

ค. $3x^4$

ง. x^4

3. จาก $W = (3x)^3 y^{-2} z^{\frac{1}{3}} \times 81^{\frac{1}{4}} x^{-3} y^3 z^{-2}$ ข้อใดคือค่าของ W

ก. $\frac{9xy}{(\sqrt[3]{z})^{-3}}$

~~ข. $\frac{81y}{(\sqrt[3]{z})^{-5}}$~~

ค. $\frac{9y}{z^{\frac{5}{3}}}$

ง. $\frac{64x^0 y^1}{(\sqrt[3]{z})^{-5}}$

4. จากสมการ $4^{x+3} = 8^{3-x}$ ข้อใดคือค่าของตัวแปร x

ก. $x = 0$

ข. $x = \frac{1}{5}$

ค. $x = \frac{2}{5}$

~~ง. $x = \frac{3}{5}$~~

5. จากสมการ $9^{2x-1} = \frac{1}{27}$ ข้อใดคือค่าของตัวแปร x

~~ก. $x = -\frac{1}{4}$~~

ข. $x = \frac{1}{4}$

ค. $x = -\frac{1}{2}$

ง. $x = \frac{1}{2}$

6. จากสมการ $2^{2x} - 2^{x+1} + 1 = 0$ ข้อใดคือค่าของตัวแปร

ก. $x = -1, 1$

ข. $x = 2, -2$

~~ค. $x = 0$~~

ง. $x = 3$

8 คณิตศาสตร์ข้างโยธา

7. ข้อใดมีค่าเท่ากับจำนวน $(\sqrt[3]{8} + 3\sqrt{9}) - (\sqrt[4]{81} + 3\sqrt{4})$

ก. 0 ~~✗~~ 2

ค. 4 ง. 6

8. จากฟังก์ชัน $y = 3^{-2x}$ ข้อใดถูกต้อง

~~✗~~ เป็นฟังก์ชันลด ที่ตำแหน่งแกน $x = 1$ ตำแหน่งแกน y จะเท่ากับ 0.111

ข. เป็นฟังก์ชันลด ที่ตำแหน่งแกน $x = 1$ ตำแหน่งแกน y จะเท่ากับ 0

ค. เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ที่ตำแหน่งแกน $x = -2$ ตำแหน่งแกน y จะเท่ากับ 9

ง. เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ที่ตำแหน่งแกน $x = 2$ ตำแหน่งแกน y จะเท่ากับ 81

9. จากสมการ $\sqrt{2x+1} - \sqrt{4x-7} + \sqrt{x-4} = 0$ ข้อใดคือค่าของตัวแปร

ก. $x = 1, 0$ ข. $x = -1, 3$

ค. $x = 2, -\frac{4}{3}$ ~~✗~~ $x = 4, -\frac{8}{7}$

10. ท่อเหล็กกลมกลวงมีพื้นที่หน้าตัด $A_g = 57.491 \text{ cm}^2$ วัดเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกได้

$d_{\text{out}} = 76.2 \text{ mm}$ ข้อใดคือความหนาของท่อดังกล่าว

ก. $t = 3.50 \text{ mm}$ ข. $t = 3.00 \text{ mm}$

~~✗~~ $t = 2.50 \text{ mm}$ ง. $t = 2.00 \text{ mm}$

แบบวัดผล บทที่ 6 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Exponential Function)						
ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา รหัสวิชา 20121-1001				วิทยาลัย		
ชื่อ-สกุล..... ระดับ.....				ครู		
ที่	รายการประเมิน	คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน		คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน		คะแนนแบบฝึกหัด
		คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	
1	ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง					
2	เลขชี้กำลังที่อยู่ในรูปของตัวแปร					
3	การดำเนินการของเลขชี้กำลัง					
4	สมการเลขชี้กำลัง					
5	การแยกตัวประกอบของพหุนาม					
6	รากที่ n ที่อยู่ในรูปของกรณฑ์					
7	การดำเนินการรากที่ n ที่อยู่ในรูปของกรณฑ์					
8						
9						
10						
11						
12						
รวมคะแนนด้านทักษะ		10		10		60
13	ความขยันหมั่นเพียร ความวิริยะอุตสาหะ					10
14	ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์สุจริต					10
รวมคะแนนทั้งหมด				100		รวม

แบบทดสอบก่อนเรียนบทที่ 7 ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic Functions)

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย × ทับลงบนตัวอักษร ก ข ค ง ที่ถูกต้องที่สุดเพียงหนึ่งข้อเท่านั้น
(คะแนนรวม 10 คะแนน)

1. สามารถใช้ตารางลอการิทึมสามัญและลอการิทึมธรรมชาติได้
 2. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด
1. ข้อใดคือค่าของ $\log_5 15 + \log_5 10 - \log_5 6$

ก. 10	ข. 15
ค. 20	~~ข.~~ 25
2. ข้อใดคือค่าของ $\log_{\frac{1}{3}} 243$

~~ข.~~ -5	ข. -4
ค. -3	ง. -2
3. ข้อใดคือค่าของ $\log 7070$

ก. 1.673	ข. 2.518
~~ข.~~ 3.8494	ง. 4.6473
4. ข้อใดคือค่าของ $\log 0.000006$

ก. -4.3861	~~ข.~~ -5.2218
ค. -4.7792	ง. -5.3476
5. ข้อใดคือค่าของ $\ln 7.3$

ก. 1.9878	ข. 3.2657
~~ข.~~ 4.2905	ง. 5.3644
6. ข้อใดคือค่าของ $\ln 0.000873$

ก. -8.0938	~~ข.~~ -7.0436
ค. -6.5039	ง. -5.3332

2 คณิตศาสตร์ช่วงโยธา

7. จาก $5\log_a x - 2\log_a (x - 4) = 4\log_a x - \log_a x$ ข้อใดคือค่าของตัวแปร x

ก. 0 ~~ข.~~ 2

ค. -1 ง. 3

8. จาก $\ln [2 \ln(x) + 8] = \ln 8$ ข้อใดคือค่าของตัวแปร x

ก. 0 ข. 2

~~ค.~~ 1 ง. -3

9. จาก $e^{\ln(x^2-4x)} = \ln e^{x^2-24}$ ข้อใดคือค่าของตัวแปร x

~~ก.~~ 6 ข. 12

ค. -4 ง. 10

10. จาก $2\log_a \sqrt{x} - \log_a 6x = \log_a x^{-2}$ ข้อใดคือค่าของตัวแปร x

ก. $\sqrt{3}$ ~~ข.~~ $\sqrt{6}$

ค. $\sqrt[3]{3}$ ง. $\sqrt[3]{6}$

แบบฝึกหัดบทที่ 7 ฟังก์ชันลอการิทึม

แบบฝึกหัดจำนวนทั้งหมด 20 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน รวม 60 คะแนน (ห้ามใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด)

1. จาก $y = \log_3 81$ จงหาค่า y

4

2. จาก $5 = \log_a 3125$ จงหาค่า a

5

3. จงคำนวณหาค่า $\log_4 1024$

5

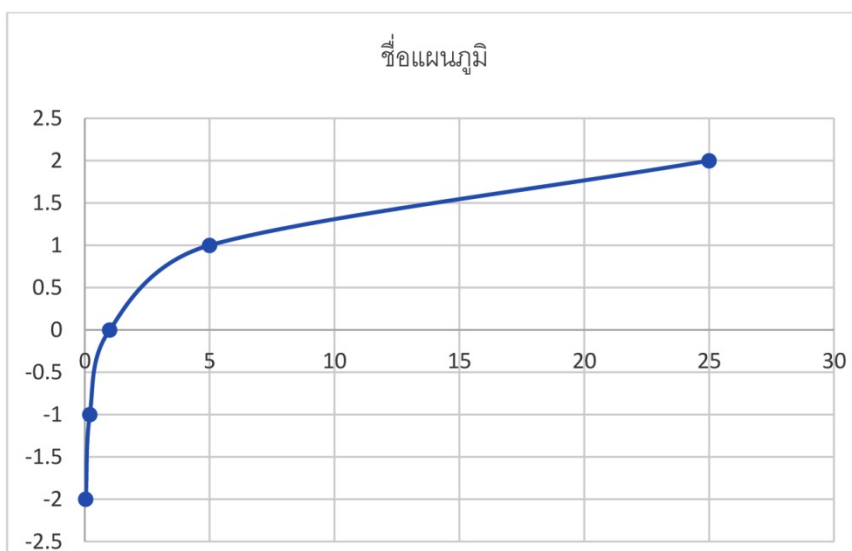
4. จงคำนวณหาค่า $\log_6 \frac{1}{216}$

-3

5. จงคำนวณหาค่า $216^{\log_6 2}$

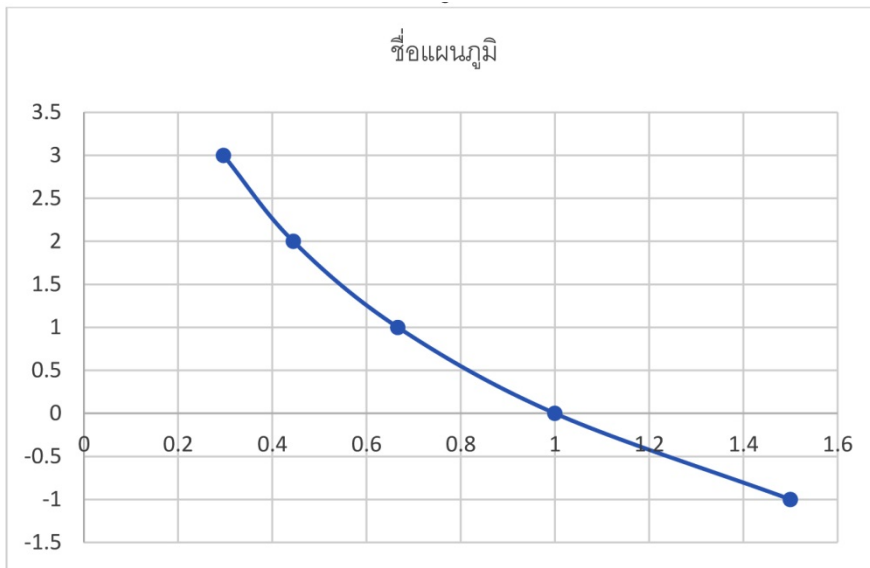
8

6. จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = \log_5 x$



4 คณิตศาสตร์ข้างโยธา

7. จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = \log_{\frac{2}{3}} x$



8. จงคำนวณหาค่า $(\log 22 + \log 18) - \log 4$

1

9. จงคำนวณหาค่า $1000^{\log 2}$

8

10. จงคำนวณหาค่า $\log 536$

2.7292

11. จงคำนวณหาค่า $\log 0.000562$

-3.2503

12. จงคำนวณหาค่า $\log 311000$

5.4928

13. จงคำนวณหาค่า $\ln 2310$ โดยวิธีที่ 2 ใช้ตารางลอการิทึมธรรมชาติ

7.745

14. จงคำนวณหาค่า $\ln 0.0066$ โดยวิธีที่ 2 ใช้ตารางลอการิทึมธรรมชาติ

-5.02077

15. จงคำนวณหาค่า $\ln 0.0842$ โดยวิธีที่ 1 ใช้คุณสมบัติของลอการิทึม

-2.4746

16. จาก $\log(5x + 4) = 2$ จงหาค่าตัวแปร x

19.2

17. จาก $2\log_a x - \log_a(x - 1) = \log_a(x - 2)$ จงหาค่าตัวแปร x

$\frac{2}{3}$

18. จาก $\log_a x + \log_a(x + 8) = \log_a(x + 3) + \log_a(x + 4)$ จงหาค่าตัวแปร x

12

19. จาก $\ln e^{\ln x^2} = e^{\ln \ln 4x}$ จงหาค่าตัวแปร

$2\sqrt{x}$

20. นายช่างโยธาปฏิบัติงานวัดปริมาณแหล่งน้ำดิบที่อ่างกักเก็บน้ำแห่งหนึ่ง ได้ 2,500,000 ลูกบาศก์เมตร จากสถิติการเพิ่มขึ้นของปริมาณน้ำ (น้ำเข้า) เมื่อหักลบกับปริมาณน้ำที่ใช้ (น้ำออก) พบว่าจะมีปริมาณน้ำเพิ่มเฉลี่ยปีละ 25% ถ้าสถิตินี้คงที่ตลอด จงคำนวณหาว่าอีกกี่ปีปริมาณน้ำที่กักเก็บจะเพิ่มเป็น 4,000,000 ลูกบาศก์เมตร

จากสูตร $n(t) = n_0(1 + r)^t$

โดย $n(t)$ = ปริมาณน้ำที่กักเก็บเมื่อเวลาผ่านไป t ปี

n_0 = ปริมาณน้ำที่กักเก็บในปีแรก

r = อัตราการเพิ่มขึ้นของปริมาณน้ำเพิ่มสะสม

2 ปีขึ้นไป

แบบทดสอบหลังเรียนบทที่ 7 ฟังก์ชันลอการิทึม

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย × ทับลงบนตัวอักษร ก ข ค ง ที่ถูกต้องที่สุดเพียงหนึ่งข้อเท่านั้น
(คะแนนรวม 10 คะแนน) ห้ามใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด

1. ข้อใดคือค่าของ $\log_5 15 + \log_5 10 - \log_5 6$

ก. 10	ข. 15
ค. 20	~~ข.~~ 25
2. ข้อใดคือค่าของ $\log_{\frac{1}{3}} 243$

~~ก.~~ -5	ข. -4
ค. -3	ง. -2
3. ข้อใดคือค่าของ $\log 7070$

ก. 1.673	ข. 2.518
~~ก.~~ 3.8494	ง. 4.6473
4. ข้อใดคือค่าของ $\log 0.000006$

ก. -4.3861	~~ก.~~ -5.2218
ค. -4.7792	ง. -5.3476
5. ข้อใดคือค่าของ $\ln 7.3$

ก. 1.9878	ข. 3.2657
~~ก.~~ 4.2905	ง. 5.3644
6. ข้อใดคือค่าของ $\ln 0.000873$

ก. -8.0938	~~ก.~~ -7.0436
ค. -6.5039	ง. -5.3332

7. จาก $(5\log_a x - 2)(\log_a (x - 4)) = 4\log_a x - \log_a x$ ข้อใดคือค่าของตัวแปร x

ก. 0 ~~ข.~~ 2

ค. -1 ง. 3

8. จาก $\ln [2 \ln(x) + 8] = \ln 8$ ข้อใดคือค่าของตัวแปร x

ก. 0 ข. 2

~~ค.~~ 1 ง. -3

9. จาก $e^{\ln(x^2-4x)} = \ln e^{x^2-24}$ ข้อใดคือค่าของตัวแปร x

~~ก.~~ 6 ข. 12

ค. -4 ง. 10

10. จาก $2\log_a \sqrt{x} - \log_a 6x = \log_a x^{-2}$ ข้อใดคือค่าของตัวแปร x

ก. $\sqrt{3}$ ~~ข.~~ $\sqrt{6}$

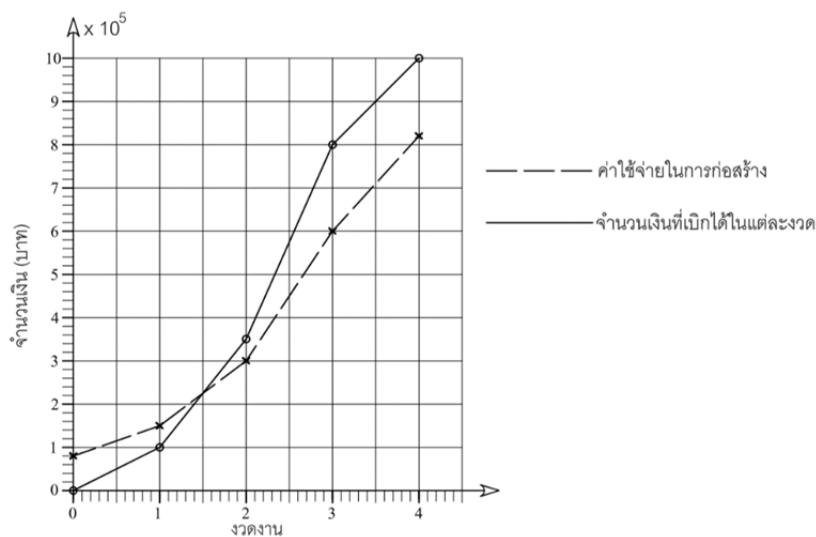
ค. $\sqrt[3]{3}$ ง. $\sqrt[3]{6}$

แบบวัดผล บทที่ 7 ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic Functions)							
ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา รหัสวิชา 20121-1001				วิทยาลัย			
ชื่อ-สกุล..... ระดับ.....				ครู			
ที่	รายการประเมิน	คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน		คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน		คะแนนแบบฝึกหัด	
		คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้		
1	ฟังก์ชันลอการิทึม						
2	การดำเนินการของลอการิทึม						
3	กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม						
4	ลอการิทึมสามัญ						
5	ค่าลอการิทึมสามัญจากตาราง						
6	ลอการิทึมธรรมชาติ						
7	สมการลอการิทึม						
8							
9							
10							
11							
12							
รวมคะแนนด้านทักษะ		10		10		60	
13	ความขยันหมั่นเพียร ความวิริยะอุตสาหะ					10	
14	ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์สุจริต					10	
รวมคะแนนทั้งหมด				100		รวม	

แบบทดสอบก่อนเรียนบทที่ 8 กราฟ (Graph)

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย × ทับลงบนตัวอักษร ก ข ค ง ที่ถูกต้องที่สุดเพียงหนึ่งข้อเท่านั้น
(คะแนนรวม 10 คะแนน) ห้ามใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด

- จาก $y = 1 - x$ ข้อใดคือส่วนตัด x และส่วนตัด y
 - $(0, 1)$
 - $(1, -1)$
 - ~~$(1, 1)$~~
 - $(-1, 1)$
- ข้อใดคือค่าความชันระหว่างพิกัด $P(1, -1)$ และ $Q(3, 5)$
 - $m = 4$
 - ~~$m = 3$~~
 - $m = 2$
 - $m = 1$



ใช้ตอบคำถามข้อ 3 - 5

- ข้อใดคือค่าใช้จ่ายในการก่อสร้างตอนเริ่มงาน (ลงทุนก่อน)
 - 50,000 บาท
 - ~~80,000 บาท~~
 - 100,000 บาท
 - 200,000 บาท

2 คณิตศาสตร์เข้าใจ

4. งานงานใดที่เบิกเงินได้แล้วทำให้เริ่มมีกำไรเกิดขึ้นเป็นครั้งแรก

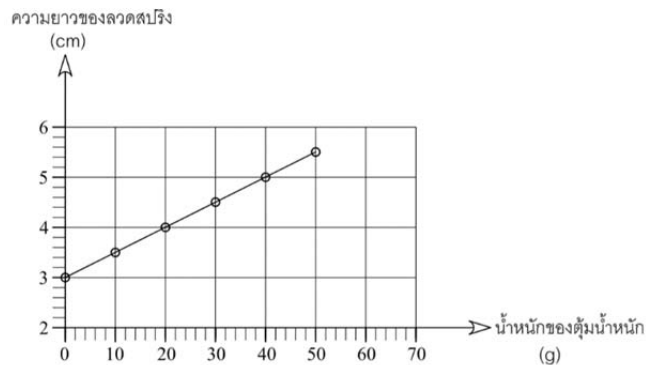
ก. งานที่ 1 ✗ งานที่ 2

ค. งานที่ 3 ง. งานที่ 4

5. ในการรับเหมาก่อสร้างครั้งนี้เมื่อแล้วเสร็จและเบิกเงินงวดที่ 4 ได้ ข้อใดคือผลกำไร

ก. 100,000 บาท ✗ 180,000 บาท

ค. 200,000 บาท ง. 280,000 บาท



ใช้ตอบคำถามข้อ 6 - 7

6. ข้อใดคือความยาวของหลอดสปริงเดิมที่ยังไม่แขวนตุ้มน้ำหนัก

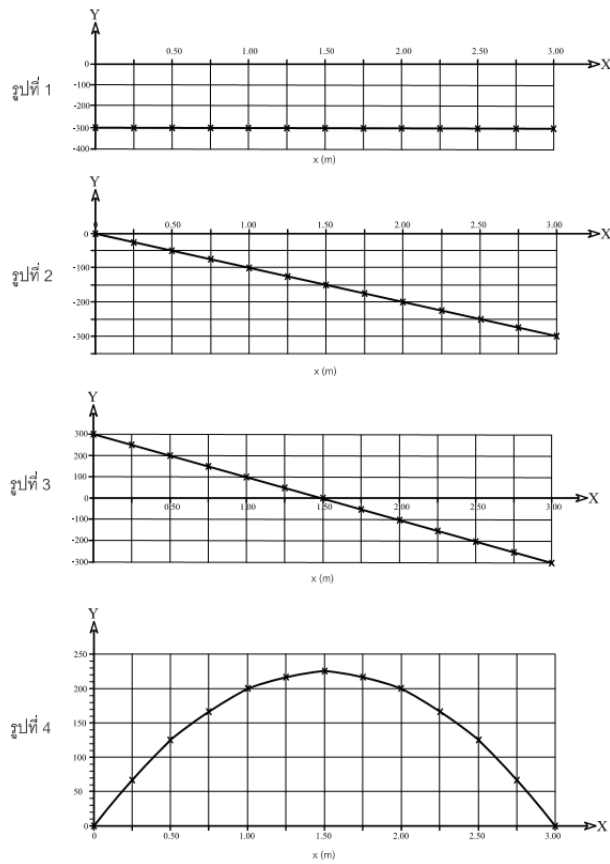
ก. 1 cm ข. 2 cm

✗ 3 cm ง. 4 cm

7. ถ้าแขวนตุ้มน้ำหนัก 34 g หลอดสปริงจะยืดออกจากความยาวเดิมเท่าใด

✗ 1.7 cm ข. 2.7 cm

ค. 3.7 cm ง. 4.7 cm



ใช้ตอบคำถามข้อ 8 - 10

8. รูปใดเป็นกราฟที่ได้จากสมการ $M + 100x^2 - 300x = 0$

ก. รูปที่ 1

ข. รูปที่ 2

ค. รูปที่ 3

☒ รูปที่ 4

9. รูปใดเป็นกราฟที่ได้จากสมการ $V + 100x = 0$

ก. รูปที่ 1

☒ รูปที่ 2

ค. รูปที่ 3

ง. รูปที่ 4

10. รูปใดเป็นกราฟที่ได้จากสมการ $V + 200x - 300 = 0$

ก. รูปที่ 1

ข. รูปที่ 2

☒ รูปที่ 3

ง. รูปที่ 4

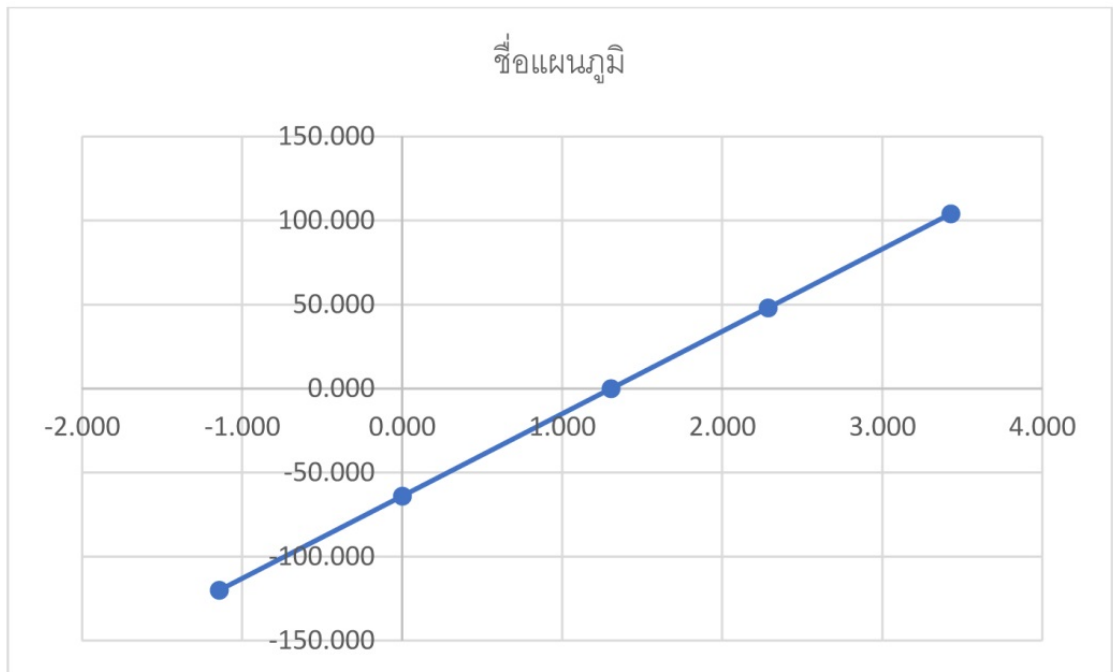
แบบฝึกหัดบทที่ 8 กราฟ

คำสั่ง แบบฝึกหัดจำนวนทั้งหมด 10 ข้อ ข้อละ 6 คะแนน รวม 60 คะแนน
(ห้ามใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด)

1. จาก $y = 7x - 8$ จงหาส่วนตัดแกน x และแกน y พร้อมทั้งเขียนกราฟ

จุดตัดแกน $x = 0, y = -64$

จุดตัดแกน $y = 0, x = 1.306$

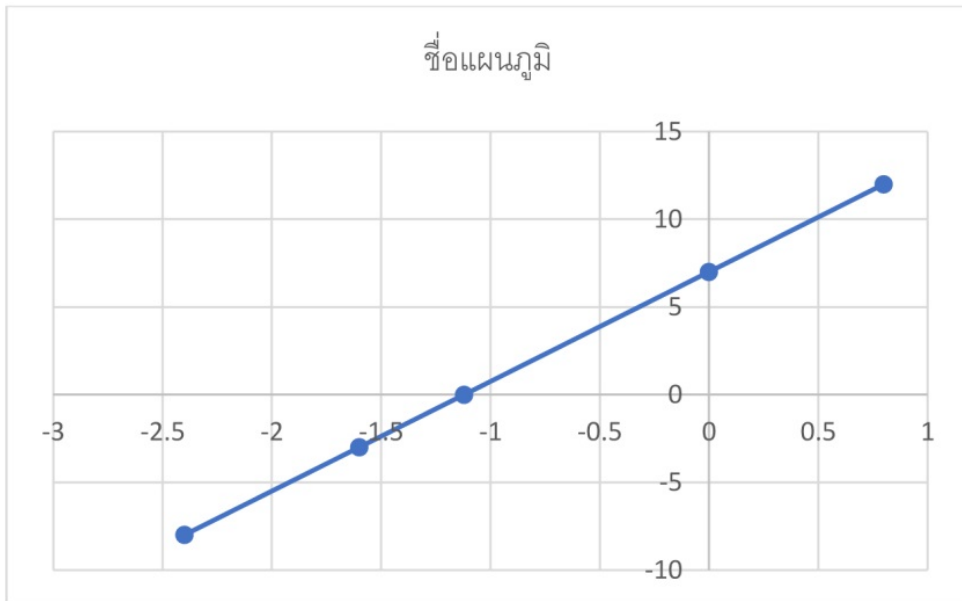


รูปที่ 8.22

2. จาก $5x - 2y + 4 = 0$ จงหาส่วนตัดแกน x และแกน y พร้อมทั้งเขียนกราฟ

จุดตัดแกน $x = 0, y = 7$

จุดตัดแกน $y = 0, x = -1.12$



รูปที่ 8.23

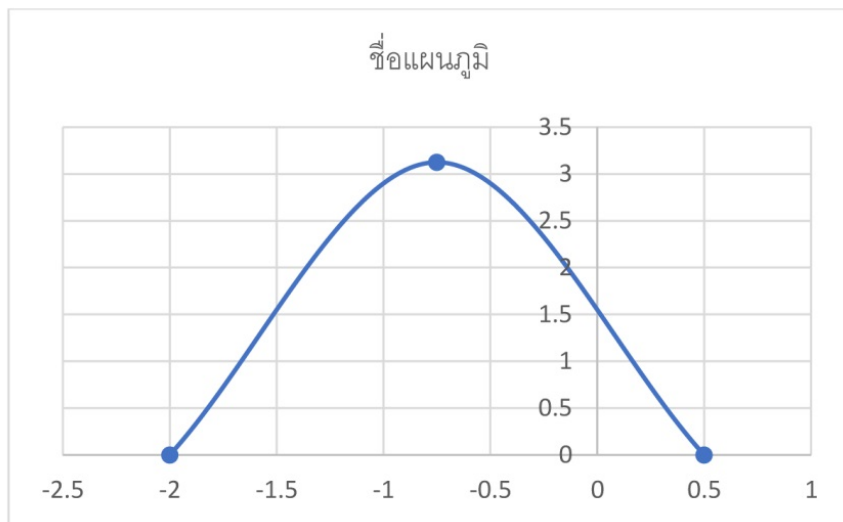
3. จาก $y = 2x^2 + 3x - 2$ จงหาจุดยอดและส่วนตัดแกน x และแกน y พร้อมทั้งเขียนกราฟ

จุดตัดแกน $x = -2, y = 0$

จุดตัดแกน $x = -0.75, y = 3.125$

จุดตัดแกน $x = 0.5, y = 0$

6 คณิตศาสตร์เชิงโยธา



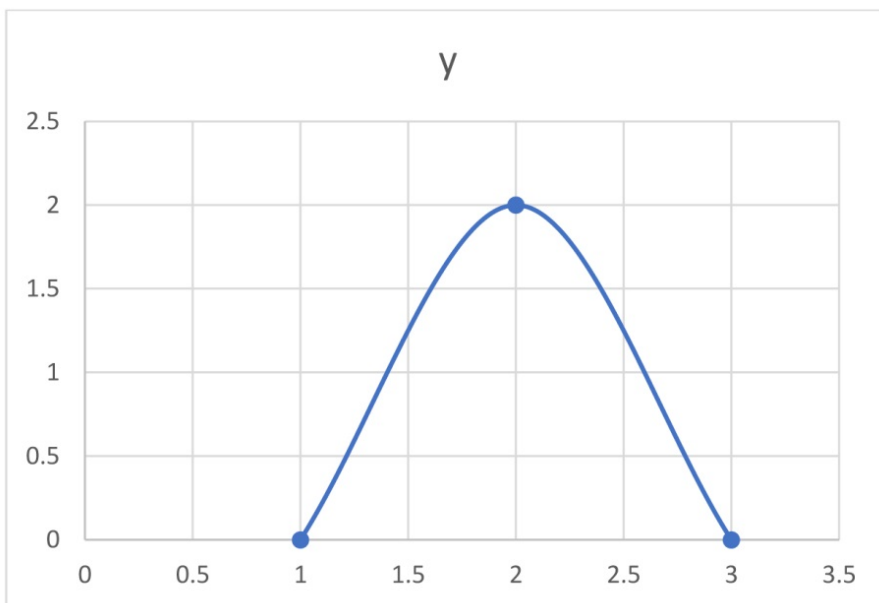
รูปที่ 8.24

4. จาก $y = -2x^2 + 8x - 6$ จงหาจุดยอดและส่วนตัดแกน x และแกน y พร้อมทั้งเขียนกราฟ

จุดตัดแกน $x = 1, y = 0$

จุดตัดแกน $x = 2, y = 2$

จุดตัดแกน $x = 3, y = 0$



รูปที่ 8.25

5. จากข้อมูลผลการทดสอบกำลังอัดประลัยของก้อนคอนกรีตทรงกระบอกตามอายุที่มีการบ่มขึ้นแตกต่างกันในแต่ละตัวอย่าง ได้ผลข้อมูลแสดงดังตาราง

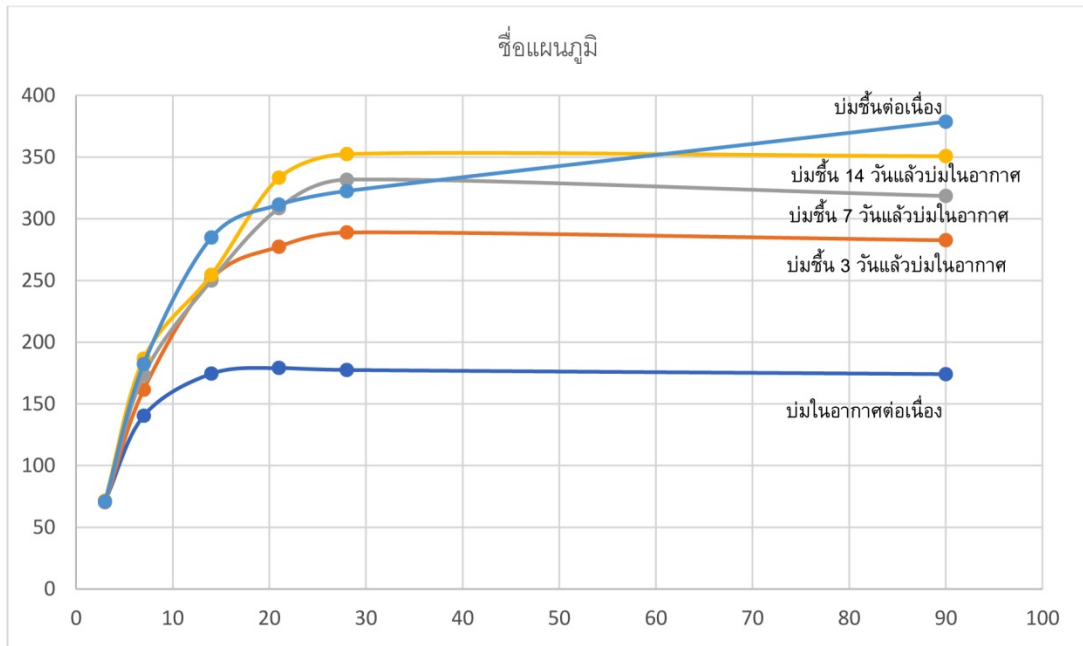
ลักษณะการบ่มขึ้น / กำลังอัดประลัย(ksc)	อายุ 3 วัน	อายุ 7 วัน	อายุ 14 วัน	อายุ 21 วัน	อายุ 28 วัน	อายุ 90 วัน
บ่มในอากาศต่อเนื่อง	71.2	140.3	174.4	179.1	177.5	174.1
บ่มขึ้น 3 วันแล้วบ่มในอากาศ	70.3	161.5	251.3	277.4	288.9	282.6
บ่มขึ้น 7 วันแล้วบ่มในอากาศ	70.5	173.4	250	308.6	331.7	318.5
บ่มขึ้น 14 วันแล้วบ่มในอากาศ	71.6	186.6	254.5	333.3	352.4	350.7
บ่มขึ้นต่อเนื่อง	70.7	182.2	284.7	311.5	322.5	378.7

* ksc = หน่วยของกำลังอัดก้อนคอนกรีตตัวอย่าง มีค่าเท่ากับ kg/cm^2

จงนำค่าในตารางไปเขียนกราฟเชิงเส้นและตอบคำถามจากกราฟต่อไปนี้

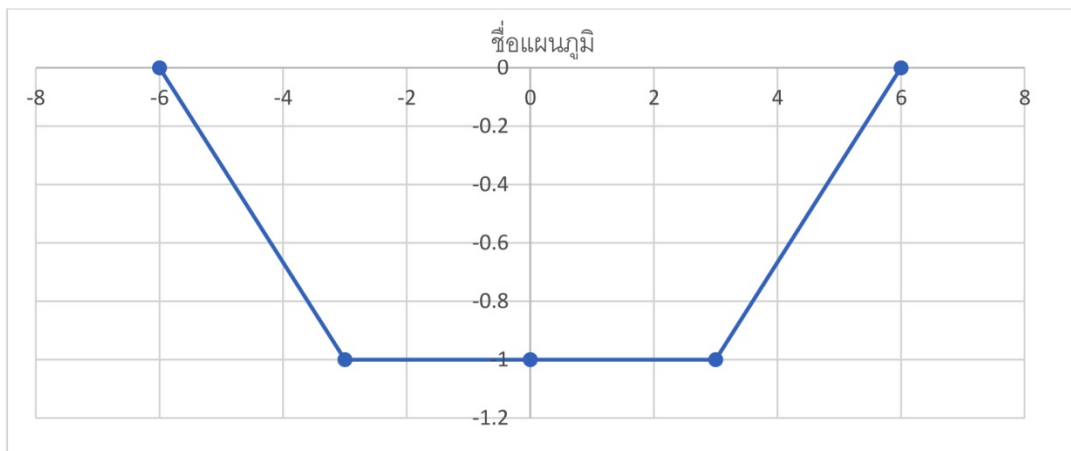
1. ลักษณะการบ่มขึ้นใดให้กำลังอัดต่ำสุดกว่าทุกกรณี
2. ที่ 7 วัน ลักษณะการบ่มขึ้นใดให้ค่ากำลังอัดสูงสุด
บ่มขึ้น 14 วันแล้วบ่มในอากาศ
3. ที่ 14 วัน ลักษณะการบ่มขึ้นใดให้ค่ากำลังอัดสูงสุด
บ่มขึ้นต่อเนื่อง
4. ที่ 21 วัน ลักษณะการบ่มขึ้นใดให้ค่ากำลังอัดสูงสุด
บ่มขึ้น 14 วันแล้วบ่มในอากาศ
5. ที่ 28 วัน ลักษณะการบ่มขึ้นใดให้ค่ากำลังอัดสูงสุด
บ่มขึ้น 14 วันแล้วบ่มในอากาศ
6. ที่ 90 วัน ลักษณะการบ่มขึ้นใดให้ค่ากำลังอัดสูงสุด
บ่มขึ้นต่อเนื่อง

วิธีทำ



รูปที่ 8.26

6. คลองชลประทานหน้าตัดสี่เหลี่ยมคางหมูสายหนึ่งมีความกว้างของท้องคลอง 6.00 m ความลาดด้านข้าง 1 ต่อ 3 มีความลึกปกติ 1.00 m จงนำค่าต่างๆ ที่โจทย์กำหนดนี้ไปแปลความหมายให้เป็นจำนวนคู่อันดับ จากนั้นทำการเขียนหน้าตัดคลองจากคู่อันดับที่ได้



รูปที่ 8.27

7. การทดสอบตัวอย่างวัสดุเหล็กเส้นผ่านศูนย์กลาง 12 mm ระยะความยาว Gauge length 50 mm ได้ข้อมูลแสดงดังตาราง

แรงดึง (Load ; kN)	การยืดตัว (Elongation ; mm)
0	0
0.0125	7
0.0375	21
0.0625	36
0.0875	50
0.125	53
0.2	53
0.5	54
1	75
2.5	90
7	97
10	87.8
11.5	83.3

จงเขียนกราฟความสัมพันธ์และหาค่าดังต่อไปนี้

1. คำนวณหาค่ามอดุลัสความยืดหยุ่นจากสูตร $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$ โดยที่ $\sigma = \frac{P}{A}$ และ $e = \frac{\delta}{\ell}$

2. จงหาความเค้นที่จุดคราก $f_y = \frac{P}{A}$

โดย $\sigma =$ ความเค้น หน่วยเป็น $\frac{N}{m^2}$ หรือ Pa

$P =$ น้ำหนักหรือแรงดึงที่กระทำกับวัสดุ หน่วยเป็น kN แปลงหน่วยให้เป็น N

$A =$ เป็นพื้นที่หน้าตัดของวัสดุ หน่วยเป็น mm^2 แปลงหน่วยให้เป็น m^2

$\epsilon =$ ความเครียด หน่วยเป็น mm/mm

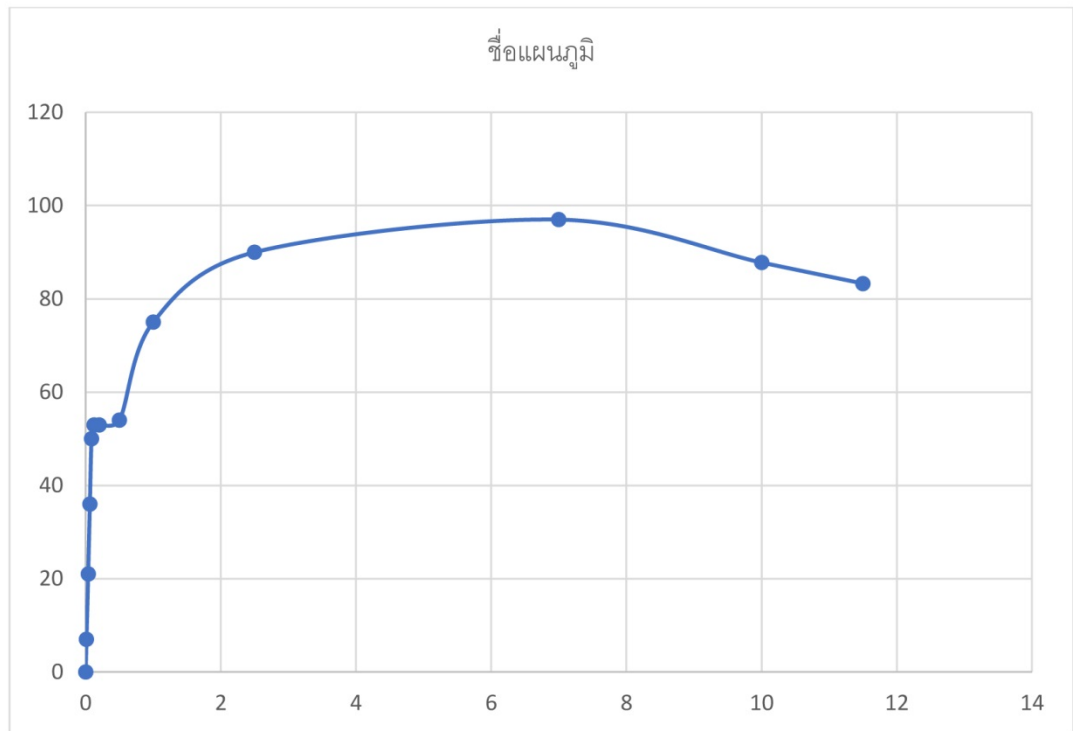
$\delta =$ ความยาวที่เปลี่ยนไป หน่วยเป็น mm

$\ell =$ ความยาวเดิม หน่วยเป็น mm

		x (mm)	y (kN)		
		Elongation	Load		
	1	0	0		
	2	0.0125	7		
	3	0.0375	21		
	4	0.0625	36		
	5	0.0875	50	Proportional	
	6	0.125	53	elastic limit	
	7	0.2	53	fy	
	8	0.5	54		
	9	1	75		
	10	2.5	90		
	11	7	97	fu	
	12	10	87.8		
	13	11.5	83.3		

D	12	mm			
A	0.001	m ²			
L	50	mm			

Stress		Strain	E		
E	49121896.010	0.00175	28069654863	Pa	
			fy		
fy			52069209.77	Pa	



รูปที่ 8.28

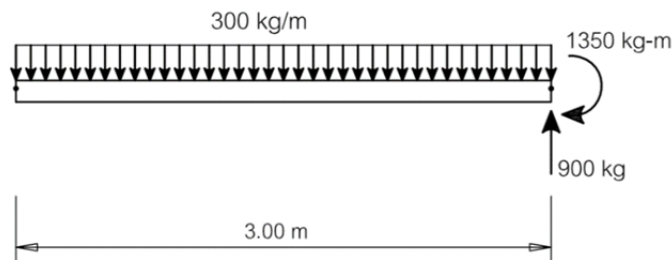
12 คณิตศาสตร์เชิงโยธา

8. คานปลายยื่นอย่างง่ายรับน้ำหนักบรรทุกทุกแบบจุดที่ปลายคาน แสดงดังรูปที่ 8.29 โดยคานดังกล่าวมีสมการของแรงภายในดังนี้

สมการของแรงเฉือน $V = -300(x)$

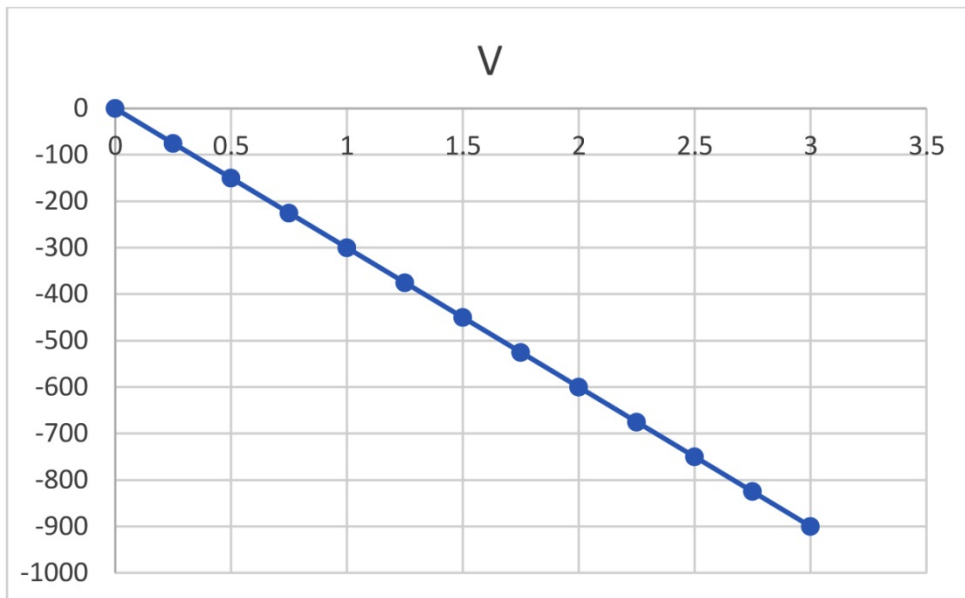
สมการของแรงบิด $M = -150(x^2)$

เมื่อ x คือค่าความยาวของคาน จากสมการ จงหาค่าคู่อันดับของทั้งสองสมการแล้วนำไปเขียนกราฟของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด และจงแปลความหมายจากกราฟที่ได้

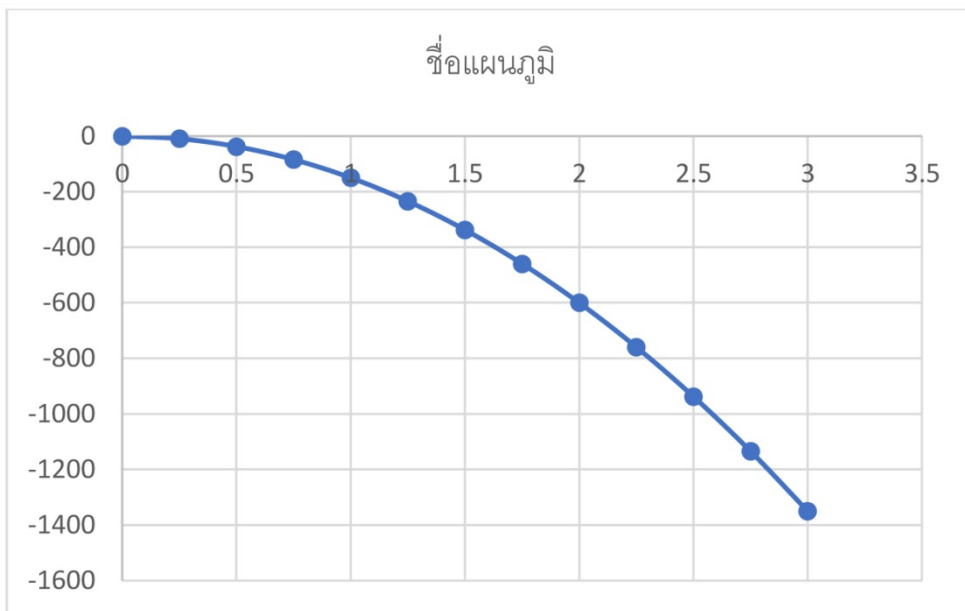


รูปที่ 8.29

X (m)	V (kg)	M (kg-m)
0	0	0
0.25	-75	-9.375
0.5	-150	-37.5
0.75	-225	-84.375
1	-300	-150
1.25	-375	-234.375
1.5	-450	-337.5
1.75	-525	-459.375
2	-600	-600
2.25	-675	-759.375
2.5	-750	-937.5
2.75	-825	-1134.375
3	-900	-1350



รูปที่ 8.30



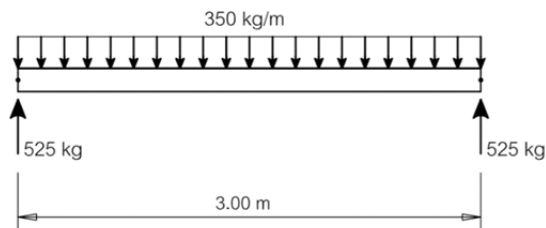
รูปที่ 8.31

9. คานช่วงเดียวอย่างง่ายรับน้ำหนักบรรทุกกระทำแบบกระจายตลอดความยาวคานแสดงดังรูปที่ 8.32 โดยคานดังกล่าวมีสมการของแรงภายในดังนี้

สมการของแรงเฉือน $V = -350(x) + 525$

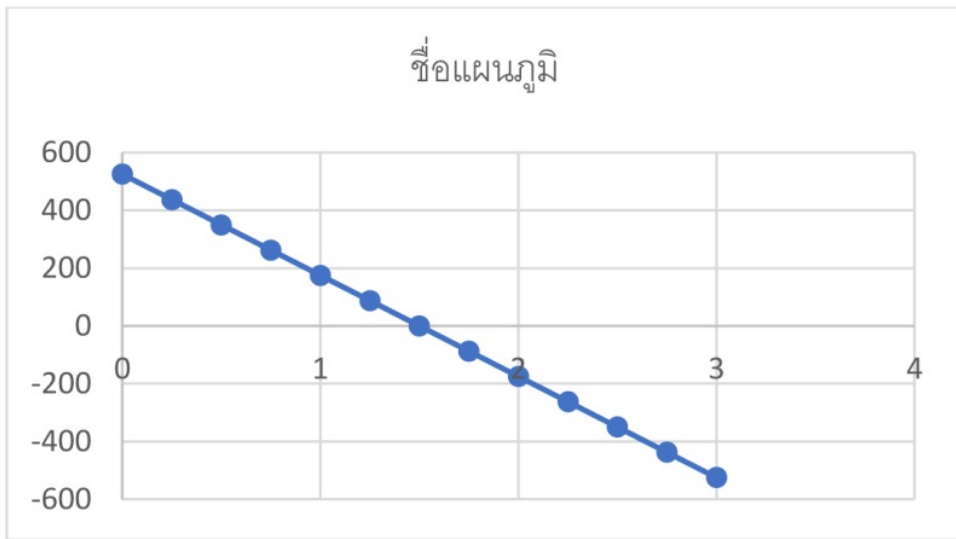
สมการของแรงเฉือน $M = -175(x^2) + 525(x)$

เมื่อ x คือค่าความยาวของคาน จากสมการ จงหาค่าคู่อันดับของทั้งสองสมการแล้วนำไปเขียนกราฟของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด และจงแปลความหมายจากกราฟที่ได้

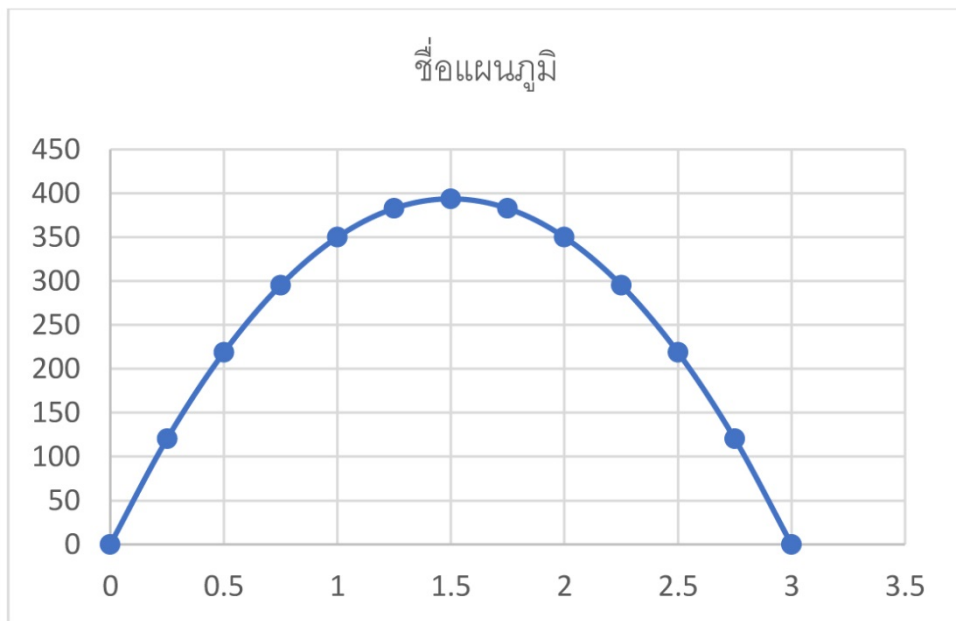


รูปที่ 8.32

X (m)	V (kg)	M (kg-m)
0	525	0
0.25	437.5	120.3125
0.5	350	218.75
0.75	262.5	295.3125
1	175	350
1.25	87.5	382.8125
1.5	0	393.75
1.75	-87.5	382.8125
2	-175	350
2.25	-262.5	295.3125
2.5	-350	218.75
2.75	-437.5	120.3125
3	-525	0



รูปที่ 8.33



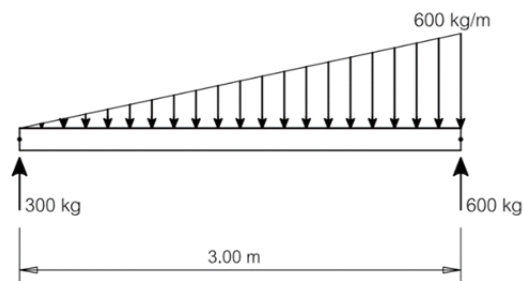
รูปที่ 8.34

10. คานช่วงเดียวอย่างง่ายรับน้ำหนักบรรทุกทุกกระทำแบบกระจายเพิ่มขึ้นตลอดความยาวคาน แสดงดังรูปที่ 8.35 โดยคานดังกล่าวมีสมการของแรงภายในดังนี้

สมการของแรงเฉือน $V = -100(x^2) + 300$

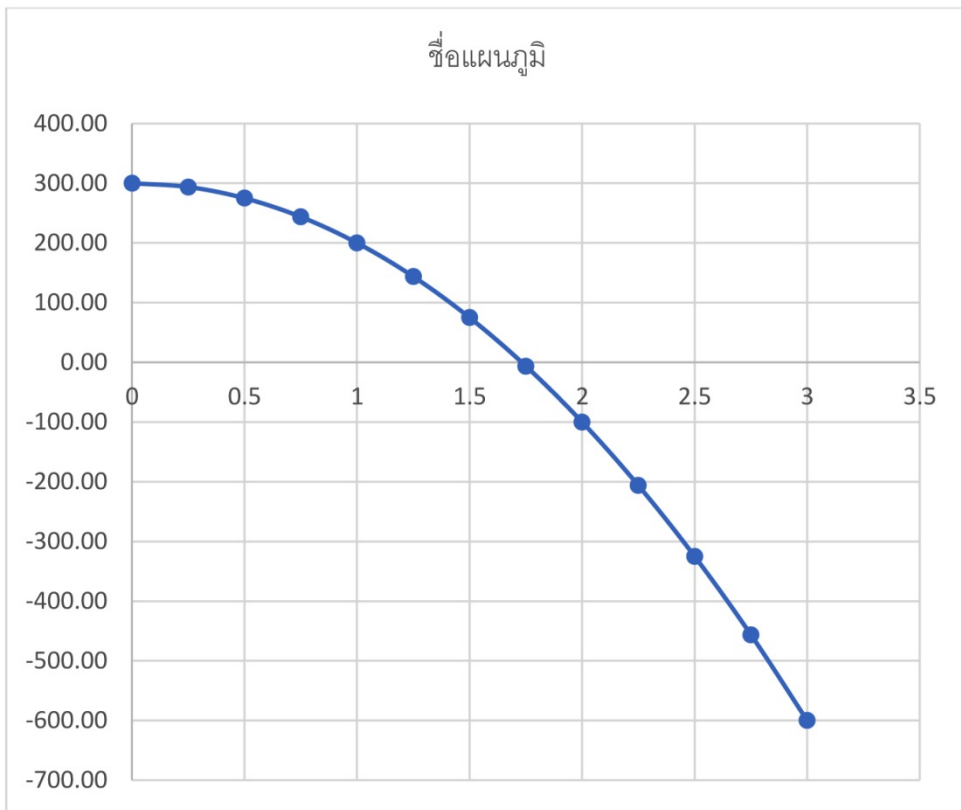
สมการของแรงบิด $M = -\frac{100}{3}(x^3) + 300(x)$

เมื่อ x คือค่าความยาวของคาน จากสมการ จงหาค่าคู่อันดับของทั้งสองสมการแล้วนำไปเขียนกราฟของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด และจงแปลความหมายจากกราฟที่ได้

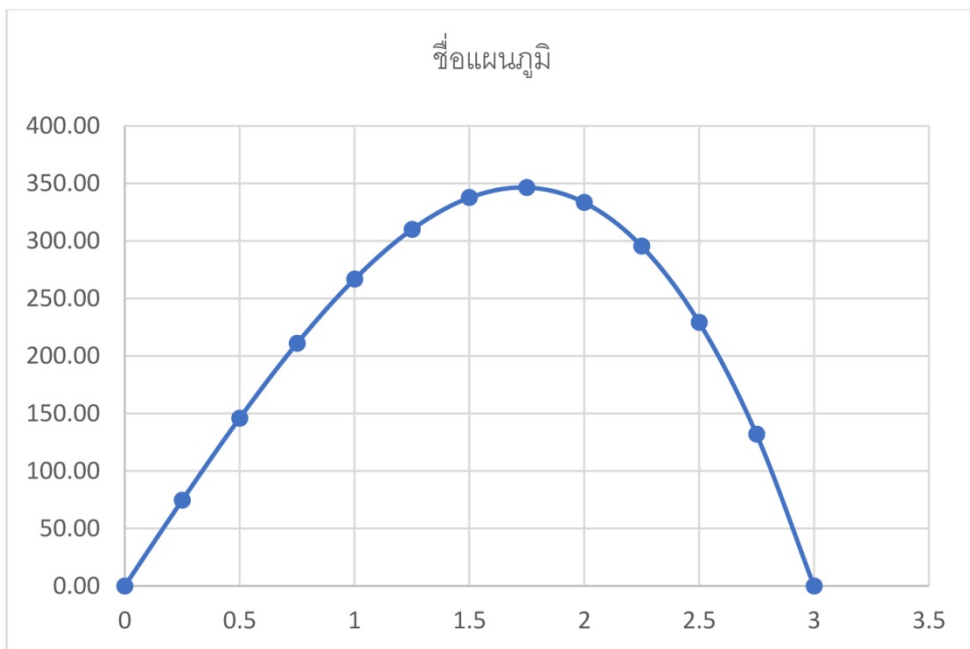


รูปที่ 8.35

X (m)	V (kg)	M (kg-m)
0	300.00	0.00
0.25	293.75	74.48
0.5	275.00	145.83
0.75	243.75	210.94
1	200.00	266.67
1.25	143.75	309.90
1.5	75.00	337.50
1.75	-6.25	346.35
2	-100.00	333.33
2.25	-206.25	295.31
2.5	-325.00	229.17
2.75	-456.25	131.77
3	-600.00	0.00



รูปที่ 8.36



รูปที่ 8.37

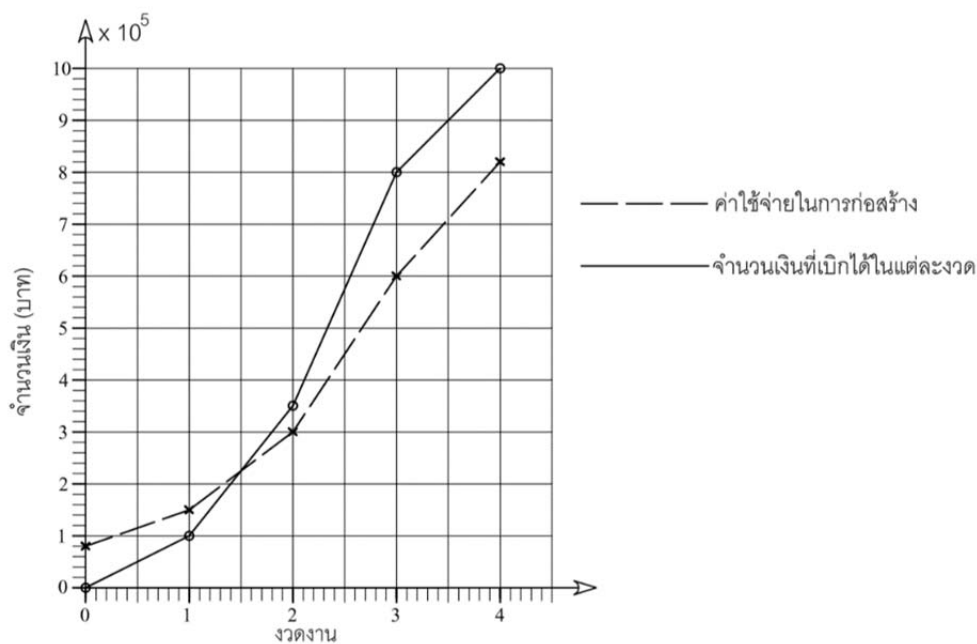
แบบทดสอบหลังเรียนบทที่ 8 กราฟ

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย × ทับลงบนตัวอักษร ก ข ค ง ที่ถูกต้องที่สุดเพียงหนึ่งข้อเท่านั้น
(คะแนนรวม 10 คะแนน) ห้ามใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด

1. จาก $y = 1 - x$ ข้อใดคือส่วนตัด x และส่วนตัด y

ก. $(0, 1)$	ข. $(1, -1)$
✗ ค. $(1, 1)$	ง. $(-1, 1)$
2. ข้อใดคือค่าความชันระหว่างพิกัด $P(1, -1)$ และ $Q(3, 5)$

ก. $m = 4$	✗ ค. $m = 3$
ด. $m = 2$	ง. $m = 1$



ใช้ตอบคำถามข้อ 3 - 5

3. ข้อใดคือค่าใช้จ่ายในการก่อสร้างตอนเริ่มงาน (ลงทุนก่อน)

ก. 50,000 บาท	✗ ค. 80,000 บาท
ด. 100,000 บาท	ง. 200,000 บาท

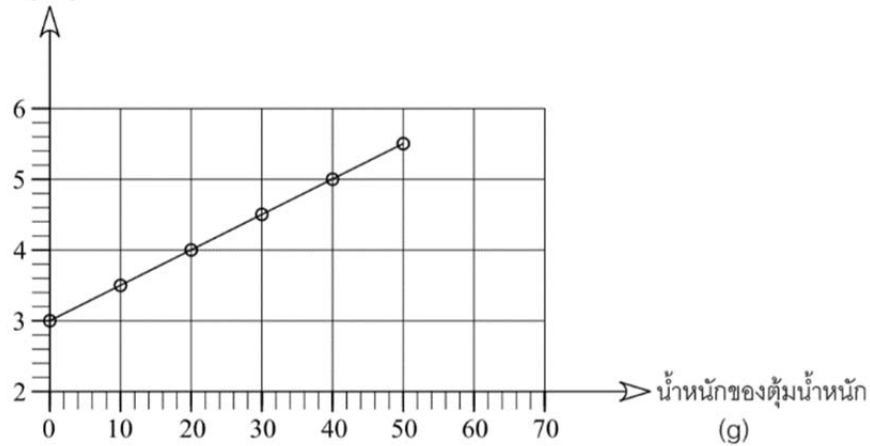
4. งานงานใดที่เบิกเงินได้แล้วทำให้เริ่มมีกำไรเกิดขึ้นเป็นครั้งแรก

- ก. งานที่ 1 ☒ งานที่ 2
 ค. งานที่ 3 ง. งานที่ 4

5. ในการรับเหมาก่อสร้างครั้งนี้เมื่อแล้วเสร็จและเบิกเงินงวดที่ 4 ได้ ข้อใดคือผลกำไร

- ก. 100,000 บาท ☒ 180,000 บาท
 ค. 200,000 บาท ง. 280,000 บาท

ความยาวของลวดสปริง
(cm)



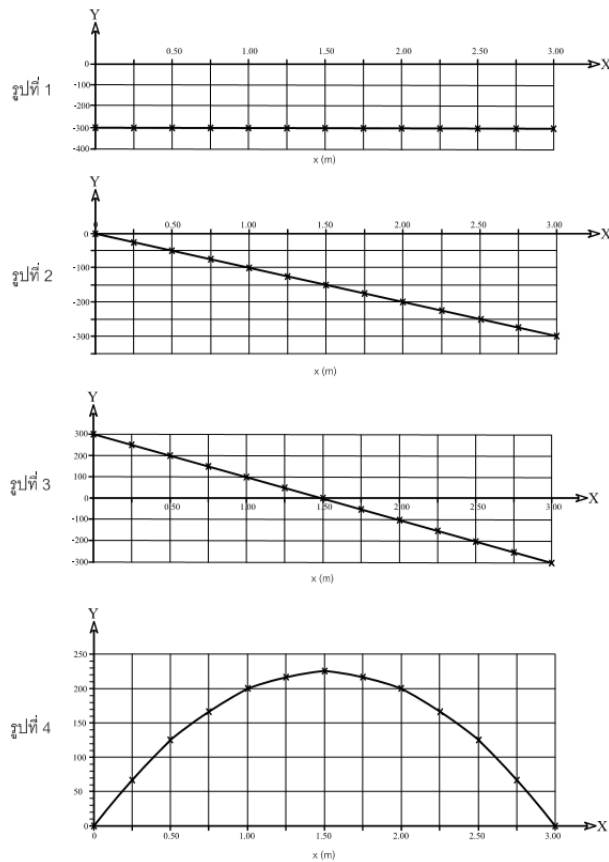
ใช้ตอบคำถามข้อ 6 - 7

6. ข้อใดคือความยาวของลวดสปริงเดิมที่ยังไม่แขวนตุ้มน้ำหนัก

- ก. 1 cm ข. 2 cm
☒ 3 cm ง. 4 cm

7. ถ้าแขวนตุ้มน้ำหนัก 34 g ลวดสปริงจะยืดออกจากความยาวเดิมเท่าใด

- ☒ 1.7 cm ข. 2.7 cm
 ค. 3.7 cm ง. 4.7 cm



ใช้ตอบคำถามข้อ 8 - 10

8. รูปใดเป็นกราฟที่ได้จากสมการ $M + 100x^2 - 300x = 0$

ก. รูปที่ 1

ข. รูปที่ 2

ค. รูปที่ 3

☒ รูปที่ 4

9. รูปใดเป็นกราฟที่ได้จากสมการ $V + 100x = 0$

ก. รูปที่ 1

☒ รูปที่ 2

ค. รูปที่ 3

ง. รูปที่ 4

10. รูปใดเป็นกราฟที่ได้จากสมการ $V + 200x - 300 = 0$

ก. รูปที่ 1

ข. รูปที่ 2

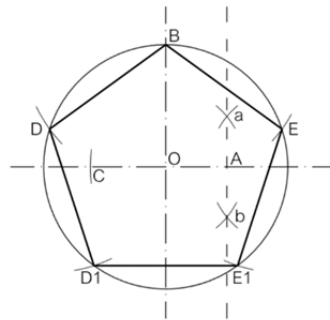
☒ รูปที่ 3

ง. รูปที่ 4

แบบวัดผล บทที่ 8 กราฟ (Graph)							
ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา รหัสวิชา 20121-1001					วิทยาลัย		
ชื่อ-สกุล..... ระดับ.....					ครู		
ที่	รายการประเมิน	คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน		คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน		คะแนนแบบฝึกหัด	
		คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้		
1	คู่อันดับ						
2	กราฟในระบบพิกัดฉาก						
3	กราฟจากสมการเส้นตรง						
4	เส้นโค้งพาราโบลา						
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
รวมคะแนนด้านทักษะ		10		10		60	
13	ความขยันหมั่นเพียร ความวิริยะอุตสาหะ					10	
14	ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์สุจริต					10	
รวมคะแนนทั้งหมด				100		รวม	

แบบทดสอบก่อนเรียนบทที่ 9 เรขาคณิต พื้นที่และปริมาตร (Geometry, Area and Volume)

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย × ทับลงบนตัวอักษร ก ข ค ง ที่ถูกต้องที่สุดเพียงหนึ่งข้อเท่านั้น
(คะแนนรวม 10 คะแนน)

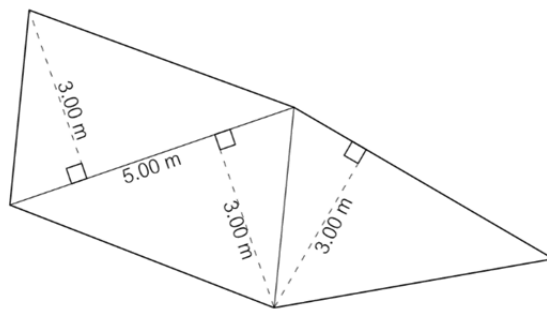


จากรูปใช้ตอบคำถามข้อ 1 - 3

1. จุดตัด C ได้จากกรณีใด
 - ☒ ส่วนโค้งรัศมี AB มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ A
 - ข. ส่วนโค้งรัศมี AB มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ B
 - ค. ส่วนโค้งรัศมี AO มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ A
 - ง. ส่วนโค้งรัศมี AO มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ B
2. จุดตัด D ได้จากกรณีใด
 - ก. ส่วนโค้งรัศมี BC มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ A
 - ☒ ส่วนโค้งรัศมี BC มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ B
 - ค. ส่วนโค้งรัศมี BO มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ A
 - ง. ส่วนโค้งรัศมี BO มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ B
3. จุดตัด E ได้จากกรณีใด
 - ก. ส่วนโค้งรัศมี BC มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ A
 - ☒ ส่วนโค้งรัศมี BC มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ B
 - ค. ส่วนโค้งรัศมี BC มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ D
 - ง. ส่วนโค้งรัศมี BC มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ E

2 คณิตศาสตร์เชิงนโยบาย

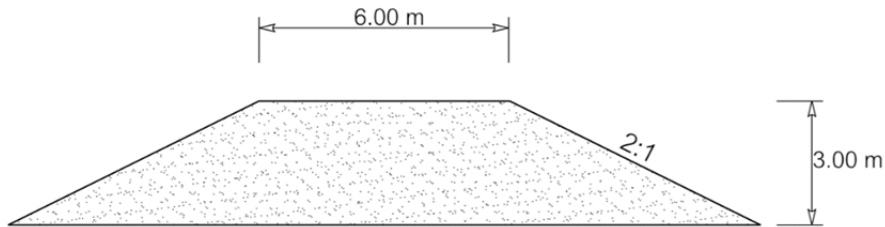
4. พื้นที่สระว่ายน้ำสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง 4 เมตร ยาว 10 เมตร ขอบสระสูงจากพื้น 1.35 เมตร จะต้องสูบน้ำเข้าปริมาตรเท่าไร ถ้าคิดน้ำเต็มทีระดับความลึก 1.20 เมตรจากพื้น
- ก. 18 ลูกบาศก์เมตร ข. 32 ลูกบาศก์เมตร
~~✗~~ 48 ลูกบาศก์เมตร ง. 65 ลูกบาศก์เมตร
5. หน้าตัดดินถมรูปสี่เหลี่ยมคางหมู สูง 2.00 เมตร มีความกว้างด้านผิวทางที่ 10 เมตร คิดค่าความชันที่ 2:1 ข้อใดคือพื้นที่หน้าตัดดินถมดังกล่าว
- ~~✗~~ 22 ตารางเมตร ข. 32 ตารางเมตร
ค. 56 ตารางเมตร ง. 62 ตารางเมตร
6. เหล็กเส้นกลมมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 12 มิลลิเมตร คิดเป็นพื้นที่เท่าใดต่อเส้น
- ก. 0.603 ตารางเซนติเมตร ~~✗~~ 1.131 ตารางเซนติเมตร
ค. 1.583 ตารางเซนติเมตร ง. 2.110 ตารางเซนติเมตร
7. ตั้งไม้แบบเสาที่มีพื้นที่แบบด้านในหน้าตัด 0.25×0.40 เมตร สูง 3.00 เมตร จำนวน 25 ต้น จะต้องใช้คอนกรีตกี่ลูกบาศก์เมตร
- ก. 3.5 ลูกบาศก์เมตร ข. 5.5 ลูกบาศก์เมตร
~~✗~~ 7.5 ลูกบาศก์เมตร ง. 9.5 ลูกบาศก์เมตร



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อ 8

8. จากรูปเรขาคณิต จงคำนวณหาพื้นที่หน้าตัดทั้งหมด

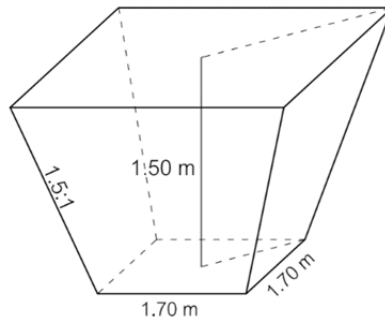
- ก. 52.50 ตารางเมตร ข. 42.50 ตารางเมตร
ค. 32.50 ตารางเมตร **✗** 22.50 ตารางเมตร



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อ 9

9. จากรูปตัดถนนที่สายหนึ่ง จงคำนวณหาพื้นที่หน้าตัดทั้งหมด

- ก. 52.50 ตารางเมตร ข. 42.50 ตารางเมตร
ค. 32.50 ตารางเมตร **✗** 22.50 ตารางเมตร



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อ 10

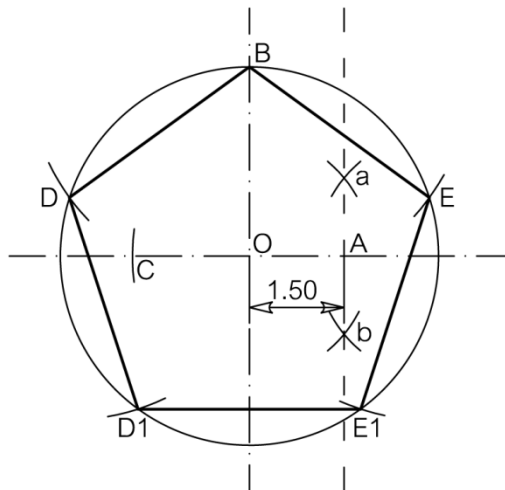
10. จากงานดินขุดของฐานรากหลุมหนึ่งมีพื้นที่หน้าตัดด้านล่างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 1.70 m ขุดลึก 1.50 m จงคำนวณปริมาตรดินขุดโดยไม่คิดเผื่อความเสียหาย

- ก. 52.90 ลูกบาศก์เมตร ข. 42.90 ลูกบาศก์เมตร
ค. 32.90 ลูกบาศก์เมตร **✗** 4.87 ลูกบาศก์เมตร

แบบฝึกหัดบทที่ 9 เรขาคณิต พื้นที่และปริมาตร

แบบฝึกหัดจำนวนทั้งหมด 10 ข้อ ข้อละ 6 คะแนน รวม 60 คะแนน

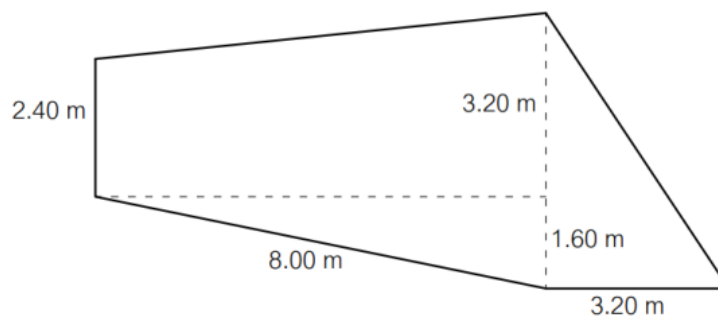
1. โจทย์กำหนดวงกลม จงสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า



รูปที่ 9.49

2. จากรูปเรขาคณิต จงคำนวณหาพื้นที่ของรูปดังกล่าว

36 m^2

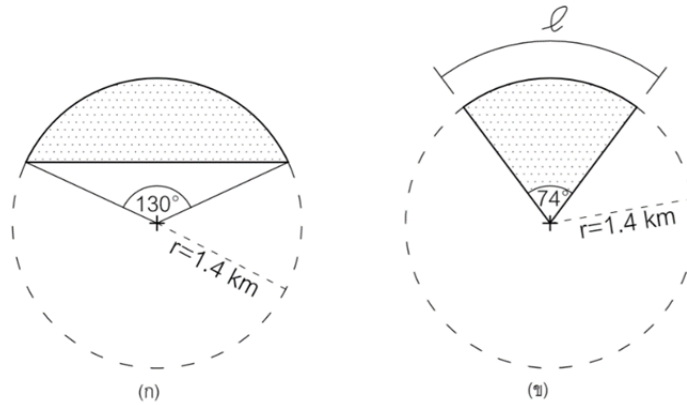


รูปที่ 9.50

3. จากรูปเรขาคณิตชิ้นส่วนวงกลม แสดงดังรูป 9.51(ก) และรูปภาคตัดของวงกลม แสดงดังรูป 9.51(ข) จงคำนวณหาพื้นที่ของรูปดังกล่าว

ก. ตอบ 1.47 km^2

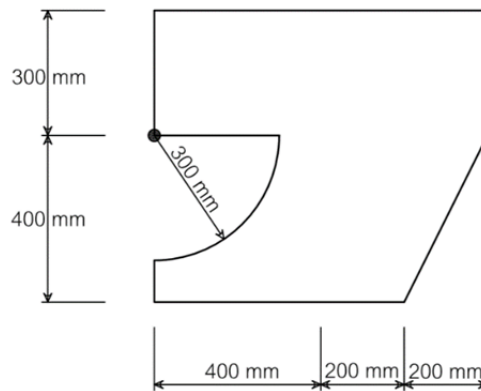
ข. ตอบ 1.27 km^2



รูปที่ 9.51

4. จากรูปเรขาคณิต แสดงดังรูป 9.52 จงคำนวณหาพื้นที่ของรูปดังกล่าว

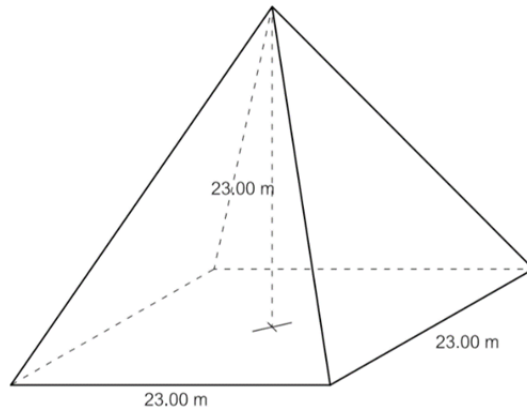
449314.2 mm^2



รูปที่ 9.52

5. จากรูปพีระมิด จงคำนวณหาปริมาตรของรูปดังกล่าว

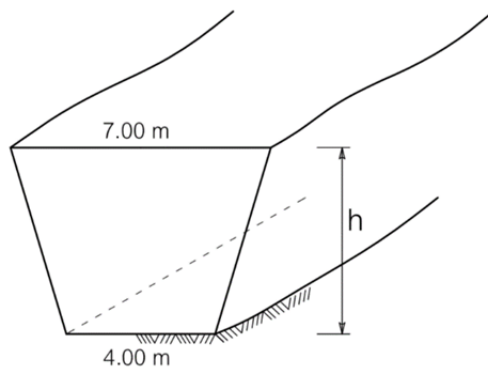
6083.5 m³



รูปที่ 9.53

6. คลองส่งน้ำชลประทานหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ยาว 15 km ในการสร้างมีการขุดดินออกเป็นปริมาตร 413000 m³ อยากทราบว่าคลองนี้มีความลึกเฉลี่ยกี่เมตร

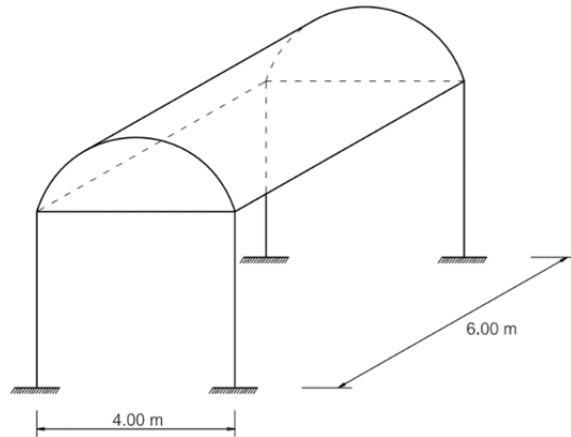
5 m



รูปที่ 9.54

7. หลังคาผ้าใบของเต็นท์หลังหนึ่งเป็นรูปทรงกระบอกผ่าครึ่งกลม แสดงดังรูปที่ 9.55 จงคำนวณหาพื้นที่ผ้าใบที่จะทำเต็นท์หลังนี้

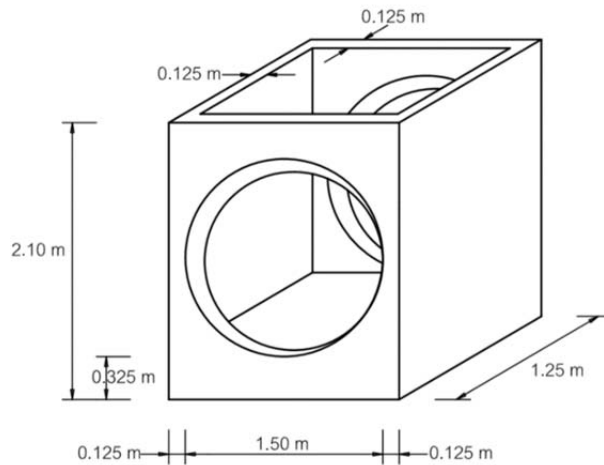
51 m²



รูปที่ 9.55

8. บ่อพักคอนกรีตเสริมเหล็ก (Manhole) แสดงดังรูปที่ 9.56 จงคำนวณหาปริมาตรของคอนกรีตที่ใช้ทำบ่อพักนี้ โดยไม่คิดเผื่อความเสียหาย

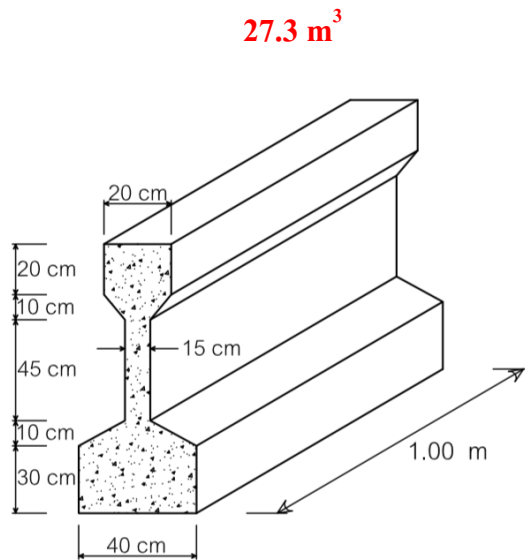
8.1 m³



รูปที่ 9.56

8 คณิตศาสตร์ช่างโยธา

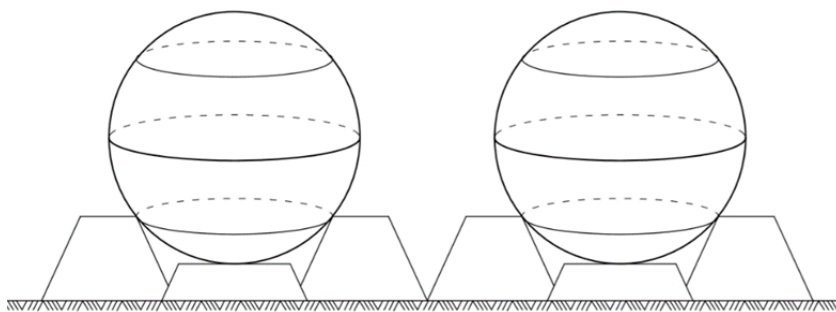
9. แท่งคอนกรีต แสดงดังรูปที่ 9.57 จงคำนวณหาปริมาตรของคอนกรีตที่ใช้ทำ โดยไม่คิดเผื่อความเสียหาย



รูปที่ 9.57

10. ถังทรงกลมบรรทุก๊าซสองลูกมีขนาดเท่ากัน แต่ละถังมีปริมาตรความจุเต็มถังไปละ 113.1 m³ จงคำนวณหาเส้นผ่านศูนย์กลางภายในของถังแต่ละลูก โดยไม่คิดผลของความหนาถัง

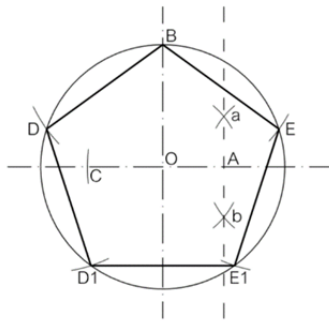
6 m



รูปที่ 9.58

แบบทดสอบหลังเรียนบทที่ 9 เรขาคณิต พื้นที่และปริมาตร

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย × ทับลงบนตัวอักษร ก ข ค ง ที่ถูกต้องที่สุดเพียงหนึ่งข้อเท่านั้น
(คะแนนรวม 10 คะแนน)

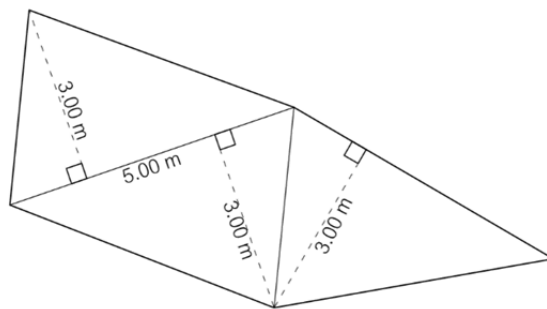


จากรูปใช้ตอบคำถามข้อ 1 - 3

1. จุดตัด C ได้จากกรณีใด
 - ☒ ส่วนโค้งรัศมี AB มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ A
 - ข. ส่วนโค้งรัศมี AB มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ B
 - ค. ส่วนโค้งรัศมี AO มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ A
 - ง. ส่วนโค้งรัศมี AO มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ B
2. จุดตัด D ได้จากกรณีใด
 - ก. ส่วนโค้งรัศมี BC มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ A
 - ☒ ส่วนโค้งรัศมี BC มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ B
 - ค. ส่วนโค้งรัศมี BO มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ A
 - ง. ส่วนโค้งรัศมี BO มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ B
3. จุดตัด E ได้จากกรณีใด
 - ก. ส่วนโค้งรัศมี BC มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ A
 - ☒ ส่วนโค้งรัศมี BC มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ B
 - ค. ส่วนโค้งรัศมี BC มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ D
 - ง. ส่วนโค้งรัศมี BC มีจุดศูนย์กลางโค้งที่ E

10 คณิตศาสตร์เชิงโยธา

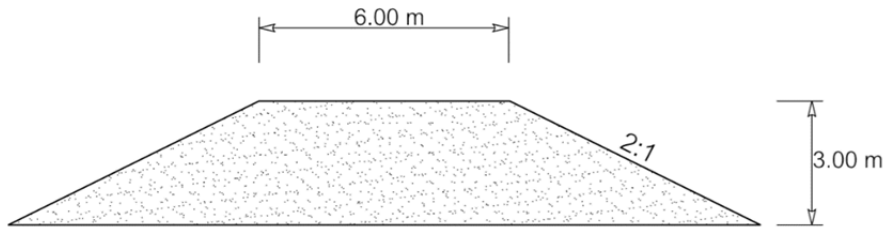
4. พื้นที่สระว่ายน้ำสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง 4 เมตร ยาว 10 เมตร ขอบสระสูงจากพื้น 1.35 เมตร จะต้องสูบน้ำเข้าปริมาตรเท่าไร ถ้าคิดน้ำเต็มทีระดับความลึก 1.20 เมตรจากพื้น
- ก. 18 ลูกบาศก์เมตร ข. 32 ลูกบาศก์เมตร
~~ค. 48 ลูกบาศก์เมตร~~ ง. 65 ลูกบาศก์เมตร
5. หน้าตัดดินถมรูปสี่เหลี่ยมคางหมู สูง 2.00 เมตร มีความกว้างด้านผิวทางที่ 10 เมตร คิดค่าความชันที่ 2:1 ข้อใดคือพื้นที่หน้าตัดดินถมดังกล่าว
- ~~ก. 22 ตารางเมตร~~ ข. 32 ตารางเมตร
ค. 56 ตารางเมตร ง. 62 ตารางเมตร
6. เหล็กเส้นกลมมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 12 มิลลิเมตร คิดเป็นพื้นที่เท่าใดต่อเส้น
- ก. 0.603 ตารางเซนติเมตร ~~ข. 1.131 ตารางเซนติเมตร~~
ค. 1.583 ตารางเซนติเมตร ง. 2.110 ตารางเซนติเมตร
7. ตั้งไม้แบบเสาที่มีพื้นที่แบบด้านในหน้าตัด 0.25×0.40 เมตร สูง 3.00 เมตร จำนวน 25 ต้น จะต้องใช้คอนกรีตกี่ลูกบาศก์เมตร
- ก. 3.5 ลูกบาศก์เมตร ข. 5.5 ลูกบาศก์เมตร
~~ค. 7.5 ลูกบาศก์เมตร~~ ง. 9.5 ลูกบาศก์เมตร



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อ 8

8. จากรูปเรขาคณิต จงคำนวณหาพื้นที่หน้าตัดทั้งหมด

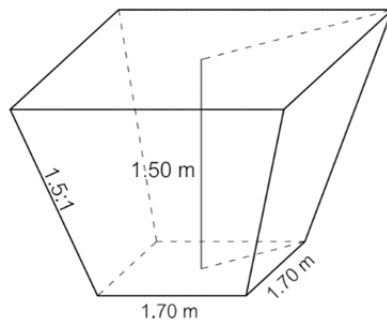
- ก. 52.50 ตารางเมตร ข. 42.50 ตารางเมตร
ค. 32.50 ตารางเมตร **✗** 22.50 ตารางเมตร



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อ 9

9. จากรูปตัดถนนที่สายหนึ่ง จงคำนวณหาพื้นที่หน้าตัดทั้งหมด

- ก. 52.50 ตารางเมตร ข. 42.50 ตารางเมตร
ค. 32.50 ตารางเมตร **✗** 22.50 ตารางเมตร



จากรูปใช้ตอบคำถามข้อ 10

10. จากงานดินขุดของฐานรากหลุมหนึ่งมีพื้นที่หน้าตัดด้านล่างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 1.70 m ขุดลึก 1.50 m จงคำนวณปริมาตรดินขุดโดยไม่คิดเผื่อความเสียหาย

- ก. 52.90 ลูกบาศก์เมตร ข. 42.90 ลูกบาศก์เมตร
ค. 32.90 ลูกบาศก์เมตร **✗** 4.87 ลูกบาศก์เมตร

แบบวัดผล							
บทที่ 9 เรขาคณิต พื้นที่และปริมาตร							
(Geometry, Area and Volume)							
ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ช่วงโยธา รหัสวิชา 20121-1001					วิทยาลัย		
ชื่อ-สกุล..... ระดับ.....					ครู		
ที่	รายการประเมิน	คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน		คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน		คะแนนแบบฝึกหัด	
		คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้	คะแนนเต็ม	คะแนนทำได้		
1	เรขาคณิต						
2	เครื่องมือที่ใช้ในการเขียนรูปเรขาคณิต						
3	เส้นตรง						
4	รูปสามเหลี่ยม						
5	รูปหลายเหลี่ยม						
6	รูปวงรี						
7	พื้นที่รูปเรขาคณิต						
8	ปริมาตรรูปเรขาคณิต						
9	เรขาคณิต						
10							
11							
12							
รวมคะแนนด้านทักษะ		10		10		60	
13	ความขยันหมั่นเพียร ความวิริยะอุตสาหะ					10	
14	ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์สุจริต					10	
รวมคะแนนทั้งหมด				100		รวม	